

VŠB-Technická univerzita Ostrava

Fakulta stavební

Katedra stavební mechaniky

Numerická analýza desek na podloží s využitím principů paralelního  
provádění

Numerical analysis of slabs on foundation with use of parallel  
processing principles

Student:

Bc. Jiří Koktan

Vedoucí diplomové práce:

doc. Ing. Jiří Brožovský, Ph.D

Ostrava 2016

## Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Jiří Koktan**

Studijní program: N3607 Stavební inženýrství

Studijní obor: 3607T037 Konstrukce staveb

Téma: Numerická analýza desek na podloží s využitím principů paralelního provádění  
Numerical analysis of slabs on foundation with use of parallel processing principles

Jazyk vypracování: čeština

### Zásady pro vypracování:

Zpracujte přehled postupů pro paralelizaci úloh stavební mechaniky se zaměřením na desky na podloží. Vypracujte software pro výpočet deformací a vnitřních sil desek na podloží. Po ověření funkčnosti programu jej rozšiřte o možnost paralelního provádění. Dosažené výsledky obou variant programu porovnejte.

### Seznam doporučené odborné literatury:

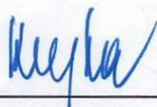
- [1] M. Okrouhlik: Numerical methods in computational mechanics, Czech Academy of Sciences, Prague 2008
- [2] Kruis. J. Domain Decomposition Methods for Distributed Computing, Saxe-Coburg Publications, 2006
- [3] Barrett et al, Templates for the Solution of Linear Systems: Building , Blocks for Iterative Methods, 2nd Edition. SIAM, Philadelphia, 1994

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

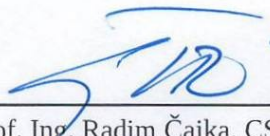
Vedoucí diplomové práce: **doc. Ing. Jiří Brožovský, Ph.D.**

Datum zadání: 29.02.2016

Datum odevzdání: 30.11.2016



doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.  
vedoucí katedry



prof. Ing. Radim Čajka, CSc.  
děkan fakulty

### **Prohlášení studenta**

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě dne .....

.....

podpis studenta



Prohlašuji, že

- byl jsem seznámen s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB – TUO) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě diplomovou práci užít (§ 35 odst. 3)
- souhlasím s tím, že jeden výtisk diplomové práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB-TUO k prezenčnímu nahlédnutí. Souhlasím s tím, že údaje o diplomové práci budou zveřejněny na informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavře licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- Bylo sjednáno, že užít své dílo – diplomovou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- Beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby
- V Ostravě dne ..... ..

podpis studenta



## **Anotace**

KOKTAN, Jiří. *Numerická analýza desek na podloží s využitím principů paralelního provádění*. Ostrava, 2016, 70 s. Diplomová práce. VŠB-TUO.

Práce se v první části zabývá odvozením vztahů pro numerické řešení desek na podloží metodou konečných prvků. Na základě odvozených vztahů byl vypracován program pro výpočet deformací a vnitřních sil desek na podloží s využitím izoparametrických konečných prvků, který je schopen automaticky vygenerovat pravidelné obdélníkové sítě. Ve druhé části práce byl vypracován přehled některých metod pro paralelizaci úloh stavební mechaniky. Program byl následně rozšířen o možnost výpočtu desek na podloží s využitím dekompozice sítě metodou Schurových doplňků. Efektivita výsledného algoritmu, který je připraven pro paralelizaci, byla porovnána na numerických příkladech. Byla také zohledněna nelineární povaha kontaktní úlohy desek na podloží.

## **Klíčová slova:**

Metoda konečných prvků, izoparametrické prvky, desky na podloží, paralelní výpočet, statická kondenzace, metoda Schurových doplňků.

## **Abstract**

The first part of the thesis deals with mathematical background of numerical analysis of slabs on foundation using finite element method. A program for calculation of displacements and internal forces of slabs on foundation using isoparametric elements was created. The program is capable of automatic generation of regular rectangular meshes. The second part of the thesis introduces some basic methods and principles for parallel processing of structural mechanics problems. The program was upgraded with capability of decomposing the mesh using Schur complements method. The algorithm is prepared for parallelisation and the efficiency was compared on numerical examples. The nonlinear nature of the analysis of slabs on foundation was also considered.

## **Keywords:**

Finite elements analysis, isoparametric elements, slabs on foundation, parallel processing, static condensation, Schur complements method.





## Obsah diplomové práce:

Seznam použitého značení .....	9
1 Úvod .....	11
2 Deskové konstrukce na podloží a řešení pomocí MKP .....	13
2.1 Maticový zápis geometrických a fyzikálních rovnic pro deskostěnové prvky .....	16
2.2 Metoda konečných prvků .....	18
2.3 Izoparametrické prvky .....	18
2.3.1 Tvarové funkce čtyř-uzlového bilineárního prvku Q4 .....	19
2.3.2 Tvarové funkce devíti-uzlového kvadratického prvku Q9 .....	20
2.4 Matice tuhosti deskostěnového prvku a vektor transformovaného zatížení .....	22
2.5 Smykové zamykání a vlastnosti izoparametrických prvků .....	27
2.5.1 Příklad 1: Deska v čistém ohybu .....	27
2.5.2 Příklad 2: Prostě podepřená čtvercová deska .....	31
2.6 Výpočet vnitřních sil na desce .....	33
2.6.1 Příklad 3: Kruhová deska .....	35
2.7 Modelování podloží .....	40
2.8 Pasternakův model podloží .....	41
2.8.1 Matice tuhosti podloží .....	44
2.8.2 Příklad 4. Obdélníková deska na podloží .....	46
2.9 Popis algoritmu MKP .....	49
3 Paralelizace úlohy .....	51
3.1 Metody dekompozice domény .....	53
3.1.1 Schwarzova metoda dekompozice s přesahem .....	53
3.1.2 Metoda Schurova doplňku .....	54
3.2 Algoritmizace metody Schurova doplňku pro řešení desek na podloží .....	57
3.2.1 Příklad 5. Čtvercová deska na podloží .....	60

3.2.2	Nelineární kontaktní úloha s využitím statické kondenzace. ....	62
4	Závěr .....	64
5	Seznam obrázků .....	66
6	Seznam tabulek.....	68
7	Literatura .....	69
8	Přílohy .....	70

## SEZNAM POUŽITÉHO ZNAČENÍ

$[B]$	matice derivací tvarových funkcí	$[-]$
$C_1$	koeficient stlačitelnosti podloží	$[N \cdot m^{-3}]$
$C_2$	koeficient smykové tuhosti podloží	$[N \cdot m^{-1}]$
$[D]$	matice tuhosti	$[-]$
$D$	desková tuhost	$[N \cdot m]$
$E$	Modul pružnosti v tahu	$[Pa]$
$\{F\}$	vektor sil	$[N]$
$G$	modul pružnosti ve smyku	$[Pa]$
$[J]$	Jacobiho transformační matice	$[-]$
$[K]$	matice tuhosti	$[-]$
$L$	virtuální práce	$[J]$
$N$	tvarová funkce	$[-]$
$[N]$	matice tvarových funkcí	$[-]$
$\{R\}$	vektor reakcí	$[-]$
$[R]$	permutační matice	$[-]$
$V$	objem	$[m^3]$
$S$	plocha	$[m^2]$
$f$	plošné zatížení	$[N \cdot m^{-2}]$
$k$	opravný součinitel smykového zkosení	$[-]$
$m_x, m_y, m_{xy}$	měrné ohybové momenty	$[N]$
$n_x, n_y$	měrné normálové síly	$[N \cdot m^{-1}]$
$\{p\}$	vektor povrchového zatížení	$[-]$
$q_{xz}, q_{yz}$	povrchové smykové síly	$[N \cdot m^{-1}]$
$\{r\}$	vektor uzlových deformací	$[-]$
$\{u\}$	vektor deformací	$[-]$
$u, v, w$	přemístění ve směru osy $x, y, z$	$[m]$
$v_{xy}, v_{xz}, v_{yz}$	měrné smykové síly	$[N \cdot m^{-1}]$
$x, y, z$	kartézské souřadnice	$[m]$
$[\Gamma]$	inverzní matice k Jacobiho matici	$[-]$

$\Pi$	potenciální přetvárná energie	[J]
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	poměrná zkosení	[–]
$[\partial]$	derivační matice	[–]
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	poměrné prodloužení	[–]
$\eta, \xi$	přirozené jednotkové souřadnice	[m]
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	křivosti	[m <sup>–1</sup> ]
$\nu$	Poissonův součinitel	[–]
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_k$	normálová napětí	[Pa]
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	smyková napětí	[Pa]
$\varphi_x, \varphi_y$	natočení	[–]
$\psi$	funkce útlumu	[–]

### Použité indexy

$i$	interní (vnitřní)
$e$	externí (vnější), elementární
$b$	hraniční

### Použité zkratky

MKP	Metoda konečných prvků.
Q4	Four-node quadrilateral (čtyř-uzlový izoparametrický prvek).
Q9	Nine-node quadrilateral (devíti-uzlový izoparametrický prvek).
HPC	High-performance computing.
TFI	Transfinitní interpolace.
FETI	Finite element tearing and interconnecting

# 1 Úvod

Nejrozšířenější metodou pro numerickou analýzu úloh ve stavební mechanice je v současné době metoda konečných prvků. Svou oblibu si získala díky své univerzálnosti a poměrně snadné algoritmizaci. Na metodě konečných prvků jsou založeny všechny obecné komerční výpočetní programy, které slouží k běžným statickým výpočtům ve stavební praxi, i programy sloužící k řešení specifických úloh. V posledních letech je vývoj numerických metod zaměřen na lepší vystižení skutečného chování, které může být zvláště u stavebních materiálů velmi vzdálené od klasického řešení podle teorie pružnosti. Metoda konečných prvků je univerzální i v možnostech rozšíření na úlohy stavební dynamiky a analýzy nelineárního chování.

Ať je nelineární chování konstrukce způsobeno velkými deformacemi a řešením podle teorie druhého řádu, nebo nepružným přetvářením materiálu (např. plastické přetváření nebo porušování), numerická analýza probíhá přírůstkovým iteračním řešením. Toto řešení spočívá v linearizaci úlohy v jednotlivých zatěžovacích krocích a iteračním postupem zmenšování chyby výpočtu a vyžaduje provést velké množství výpočetních operací. Řešení takto rozsáhlých úloh tedy vyžaduje velký výpočetní výkon, aby byla numerická analýza provedena v relevantním čase. Nárůst výpočetního výkonu procesorů je přitom stále pomalejší, jelikož se současné technologie a výrobní procesy blíží ke svým limitům. Trendem je spíše zvětšování počtu jader, než navyšování výkonu v jedno-vláknových operacích. Aby se spojený výkon více jader dal efektivně využít, je potřeba při programování využít principů a metod pro paralelizaci úlohy, tedy provádět co nejvíce výpočetních operací zároveň a nezávisle na sobě.

Paralelizace se také využívá na vyšší úrovni při řešení velmi rozsáhlých úloh na výpočetních clusterech, což je seskupení počítačů propojených rychlou sítí, za účelem provádění paralelních výpočtů. Se spuštěním superpočítače Salomon se naskytla možnost využít výpočetní výkon jednoho z nejvýkonnějších superpočítačů v Evropě. Na Fakultě stavební Vysoké školy báňské - Technické univerzity se v současnosti řeší několik projektů zaměřených na možnosti využití HPC v úlohách stavební mechaniky. Zároveň již delší dobu probíhá výzkum interakce základových konstrukcí s podložím.

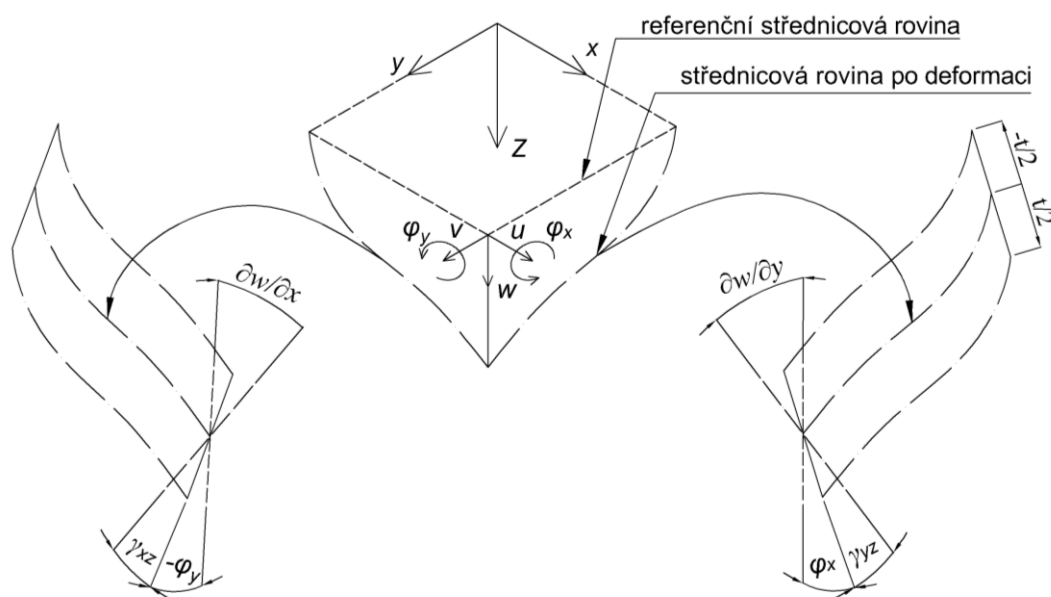
Tato práce se zabývá numerickou analýzou deskových konstrukcí na pružném podloží metodou konečných prvků. Cílem práce je odvození potřebných teoretických vztahů a vytvořit na jejich základě program pro výpočet vnitřních sil a deformací desek na podloží. Interakční úloha konstrukce a podloží, na kterém spočívá, má velký význam, jelikož tuhost

podloží ovlivňuje rozdělení vnitřních sil v konstrukci a naopak reakce z horní stavby ovlivňují deformaci podloží. Při modelování celé nosné konstrukce a zároveň podloží tak vzniká rozsáhlá soustava rovnic.

Další část práce se zabývá principy paralelních výpočtů a zhodnocení možností jejich aplikace na danou úlohu a vytvořený algoritmus. Všechny algoritmy byly vytvořeny v programovacím prostředí MATLAB.

## 2 Deskové konstrukce na podloží a řešení pomocí MKP

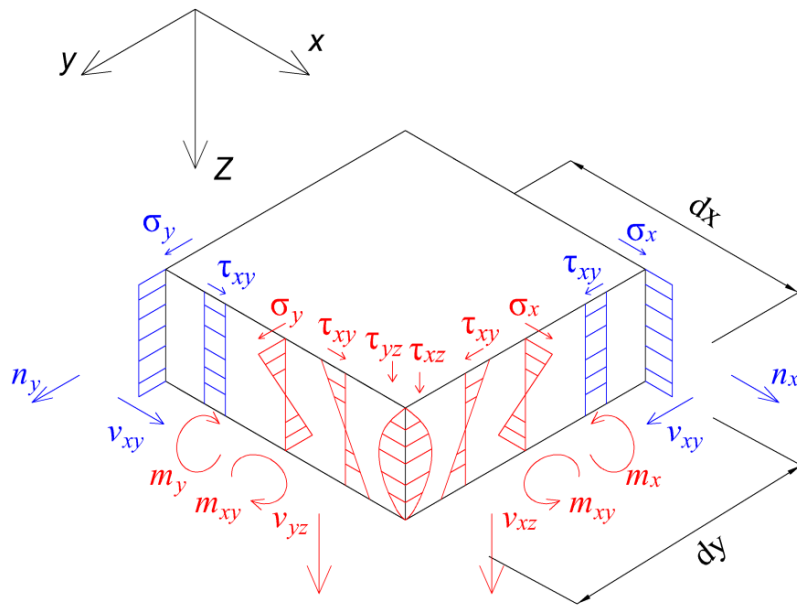
Nosná deska je ohýbaná rovinná plošná konstrukce zatížená kolmo k referenční rovině, jejíž tloušťka je výrazně menší než délka. V literatuře [1] se uvádí, že tloušťka by měla ležet v intervalu  $\frac{l}{100} < t < \frac{l}{5}$ . V opačném případě by měla být konstrukce vyšetřována jako membrána nebo trojrozměrné těleso. Soustava souřadnic se umísťuje tak, že rovina  $xy$  je ztotožněna s referenční rovinou desky a tloušťka je rovnoběžná s osou  $z$ . Uvedené předpoklady umožňují redukci na dvourozměrnou úlohu. Deskové konstrukce se řeší pomocí Kirchhoffovy teorie, která platí pro tenké desky ( $t < l/10$ ), nebo Mindlinovy teorie. Kirchhoffova teorie ohybu tenkých desek vyjadřuje všechny nenulové složky tenzoru napětí v závislosti pouze na deformaci v ose  $z$  (průhybu desky  $w$ ). Mindlinova teorie zavádí navíc vliv smykových sil na zkosení deformovaného řezu a tím dvě nezávislá pootočení normály viz (obr. 2.1).



Obrázek 2.1. Souřadnicová soustava, znaménková konvence posunů a natočení, schéma deformované desky.

Přestože je Mindlinova teorie obecnější a složitější, je odvození řady použitelných konečných prvků jednodušší právě proto, že zavádí pootočení nezávislá na průhybu a tím nevyžaduje spojitost derivací aproximačních funkcí prvního stupně mezi elementy (tzv.  $c^1$  spojitost) [1]. Odvození podle teorie tlustých desek byla v práci zvolena také proto, že interakce desek a podloží se typicky řeší u základových konstrukcí, které nemusí splňovat podmínky pro tenké desky. Základním předpokladem teorie pro řešení desek je zachování rovinnosti řezu po

deformaci střednicové roviny. Pokud se uvažuje lineárně pružný materiál a zatížení působící pouze kolmo ke střednicové rovině, jsou membránové složky napětí  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  ve střednicové rovině nulové. Jejich průběh je lineárně závislý na souřadnici  $z$  a příslušné křivosti. Smyková napětí  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  mají parabolický průběh obdobně jako u nosníků (viz obr. 2.2). Integrací po výšce průřezu se získá pět odpovídajících složek měrných vnitřních sil  $m_x, m_y, m_{xy}, v_{xz}, v_{yz}$ . Pokud zároveň působí zatížení v rovině desky (například předpětí), nebo je uvažováno s materiálovou nelinearitou, poloha neutrálné plochy už není totožná s referenční rovinou a je potřeba zavést další dvě neznámá posunutí ve střednicové rovině  $u_0, v_0$  a tři složky membránových vnitřních sil  $n_x, n_y, v_{xy}$ . V tom případě se jedná o deskostěnovou konstrukci. Z důvodu dalšího možného vývoje a rozšíření o nelineární chování materiálu je dále v práci popsáno řešení desek včetně membránových sil. Toto rozšíření nepředstavuje velkou komplikaci, protože v pružném oboru dojde pouze k sumaci řešení deskové a stěnové konstrukce.



Obrázek 2.2. Měrné vnitřní síly a momenty na desce (červeně) doplněné o membránové vnitřní síly (modře) a odpovídající složky napětí.

Z uvedených předpokladů vyplývají vztahy pro přemístění libovolného bodu v desce (2.1).

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^0(x, y) + \varphi_y(x, y) \cdot z \\ v(x, y, z) &= v^0(x, y) - \varphi_x(x, y) \cdot z \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$



Dále v textu je pro přehlednost vynechána závislost na souřadnicích  $x, y$ .

Geometrické rovnice pro nenulové složky poměrných přetvoření lze zapsat pomocí maticového zápisu

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Dosazením vztahů pro přemístění (2.1) do rovnice (2.2) se získají poměrná přetvoření, která lze rozdělit do osmi složek podle rovnic (2.3a–2.3c) odpovídajících osmi vnitřním silám případně momentům.

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x} \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial y} \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial v^0}{\partial x} + \frac{\partial u^0}{\partial y} \quad (2.3a)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \quad \kappa_y = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \quad (2.3b)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x \quad (2.3c)$$

Měrné vnitřní síly zobrazené na obr. 2.2 jsou definovány integračními vztahy (2.4a–2.4c)[1].

$$n_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x dz \quad n_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y dz \quad v_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} dz \quad (2.4a)$$

$$m_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x z dz \quad m_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y z dz \quad m_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (2.4b)$$

$$v_{xz} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz \quad v_{yz} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz \quad (2.4c)$$

Základní fyzikální rovnice teorie pružnost pro nenulové složky napětí lze maticově zapsat rovnicí:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Opravný součinitel smykového zkosení  $k=5/6$  [1] ve vztahu (2.5) zohledňuje nesoulad idealizovaného konstantního smykového napětí a jeho skutečného parabolického průběhu po výšce řezu.

## 2.1 Maticový zápis geometrických a fyzikálních rovnic pro deskostěnové prvky

Podrobnější odvození fyzikálních a geometrických rovnic pro řešení deskových a stěnových konstrukcí lze nalézt v literatuře [1, 2]. Zde jsou uvedeny pouze výsledné vztahy potřebné pro numerické řešení metodou konečných prvků v kompaktním maticovém zápisu.

Vektor  $\{u\}$  obsahuje pět neznámých přemístění nebo natočení (2.6). Vektor poměrných přetvoření  $\{\varepsilon\}$  definovaný v (2.7) lze vyjádřit z neznámých deformací pomocí geometrických rovnic (1.8)

$$\{u\} = \{u^0 \quad v^0 \quad w \quad \varphi_x \quad \varphi_y\}^T \quad (2.6)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x^0 \quad \varepsilon_y^0 \quad \gamma_{xy} \quad \kappa_x \quad \kappa_y \quad \kappa_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T \quad (2.7)$$

$$\{\varepsilon\} = [\partial] \cdot \{u\} \quad (2.8)$$

Derivační matice  $[\partial]$  je dána vztahem

$$[\partial]_{8 \times 5} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Dosazením rovnice (2.1) a rovnice (2.2) do integrálních vztahů pro vnitřní síly (2.4a–2.4c) a provedením integrace podle  $dz$  vede na fyzikální rovnice ve tvaru

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} \quad (2.10)$$

Vektor  $\{\sigma\}$  obsahuje osm složek vnitřních sil,

$$\{\sigma\} = \{n_x \quad n_y \quad v_{xy} \quad m_x \quad m_y \quad m_{xy} \quad v_{xz} \quad v_{yz}\}^T \quad (2.11)$$

$[D]$  je matice tuhosti materiálu

$$[D]_{8 \times 8} = = \frac{Et}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t^2}{12} & \frac{\nu t^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu t^2}{12} & \frac{t^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)t^2}{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)k}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)k}{2} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

## 2.2 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků je nejrozšířenější numerická metoda pro řešení úloh kontinua. V úlohách stavební mechaniky je kontinuem přetvárné těleso, které představuje idealizovanou nosnou konstrukci. Závislost pole napětí a deformace je popsána soustavou parciálních diferenciálních rovnic. Tuto soustavu většinou nelze vyřešit analyticky vzhledem k okrajovým podmínkám a složitému tvaru tělesa. Podstatou metody je diskretizace úlohy rozdělením řešené oblasti na síť tzv. konečných prvků, aproximace pole vhodně zvolenými funkcemi a s využitím energetických principů převést řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic na řešení soustavy lineárních rovnic. V deformační variantě MKP, která je nejčastější formulací MKP ve stavební mechanice, se aproximuje pole deformací a použitým energetickým principem je Lagrangeův variační princip minima celkové potenciální energie:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e = \min \quad (2.13)$$

Celková potenciální energie soustavy je skalární veličina, kterou lze vyjádřit jako součet potenciálních energií jednotlivých částí (konečných prvků). Aplikací variačního principu (2.3) na potenciální energii vyjádřenou pomocí aproximovaného pole deformací získáme základní soustavu rovnic MKP, která vyjadřuje podmínky rovnováhy v uzlech prvku. Podrobnější matematické odvození je uvedeno v literatuře [3, 1].

$$\left( \int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{r_e\} = \left( \int_S [N]^T \{p\} dS \right) + \left( \int_V [N]^T \{X\} dV \right) \quad (2.14)$$

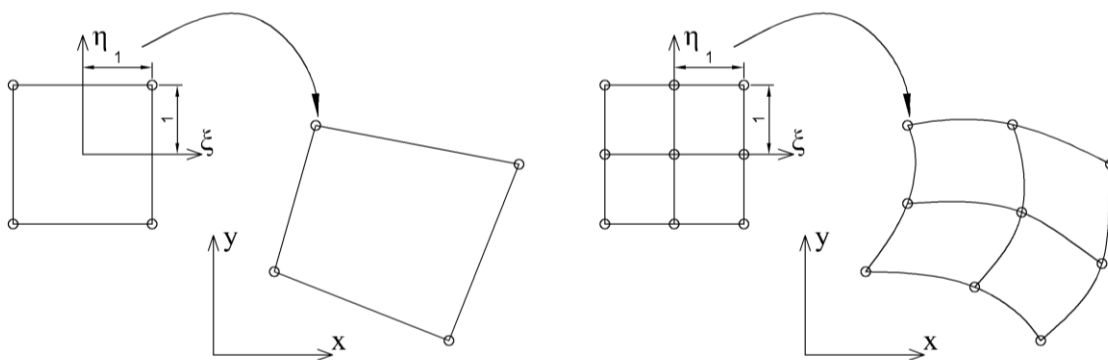
Rovnici (2.14) lze zapsat do tvaru známého z deformační metody pro řešení prutových konstrukcí:

$$[K_e] \{r_e\} = \{F_e\} \quad (2.15)$$

Matice  $[K_e]$  se nazývá matice tuhosti prvku, vektor  $\{r_e\}$  je vektor neznámých uzlových deformací a vektor  $\{F_e\}$  je vektor transformovaného zatížení prvku. Význam matic a vektorů ve vztahu (2.14) je popsán v kapitole 2.4.

## 2.3 Izoparametrické prvky

Izoparametrické konečné prvky vznikly pro potřeby vytváření nepravidelných sítí. Využívají transformaci z přirozených souřadnic do kartézských, viz (obr. 2.3). V práci byl použit bilineární čtyř-uzlový prvek a kvadratický devíti-uzlový prvek, které se v literatuře označují zkratkami Q4 a Q9. První jmenovaný umožňuje transformaci na obecný čtyřúhelník, druhý umožňuje transformovat síť se zakřivenými hranicemi.



Obrázek 2.3. Transformace prvků Q4 a Q9 z přirozených do kartézských souřadnic.

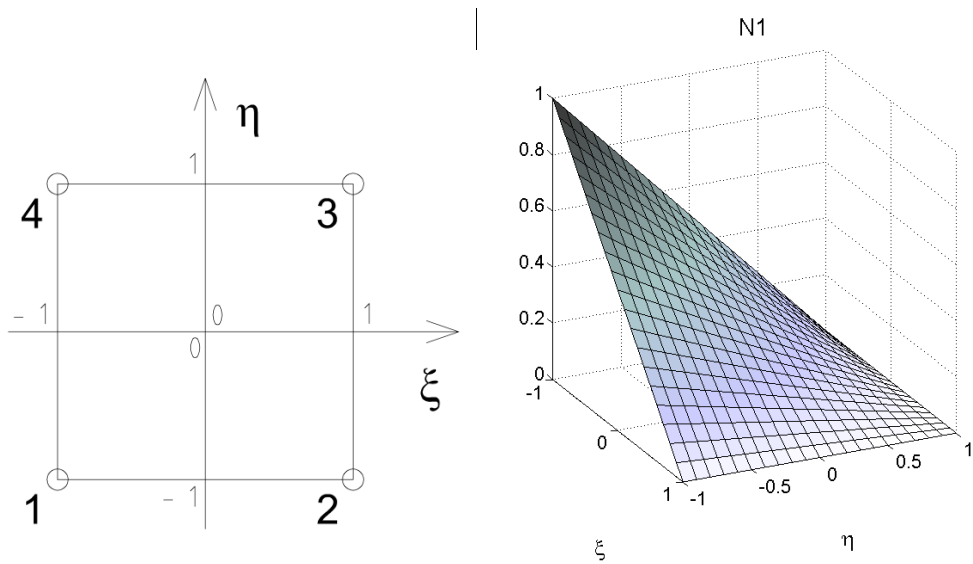
Transformace se provádí pomocí interpolačních funkcí, které jsou spojité a v příslušném uzlu nabývají hodnoty jedna, v ostatních uzlech jsou hodnoty nulové. Tím umožňují každý bod zobrazit pomocí uzlových hodnot. Transformaci lze zapsat pomocí rovnice (2.16).

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot f(\xi_i, \eta_i) \quad (2.16)$$

Funkce  $f$  ve výrazu (2.16) může reprezentovat hodnotu souřadnice v kartézských souřadnicích. U izoparametrických prvků se stejné interpolační funkce  $N_i$  používají i jako aproximační tvarové funkce. Funkce  $f$  pak může představovat i pole neznámých deformací. Transformace souřadnicového systému přináší komplikaci v provádění integrací v rovnici (2.14). Složitost výrazů vyžaduje použití numerické integrace, která se provádí výhradně pomocí *Gaussovy kvadratury* [1].

### 2.3.1 Tvarové funkce čtyř-uzlového bilineárního prvku Q4

Interpolační funkce byly převzaty z publikace [1]. Tvar interpolačních funkcí  $\{N^{Q4}\} = \{N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4\}$  (2.17) je zobrazen na obr. 2.4. Pro odvození matice tuhosti prvku je potřeba znát i první derivace podle přirozených souřadnic (2.18 a 2.19).



Obrázek 2.4. Číslování a poloha uzlů prvku Q4, tvar interpolační funkce.

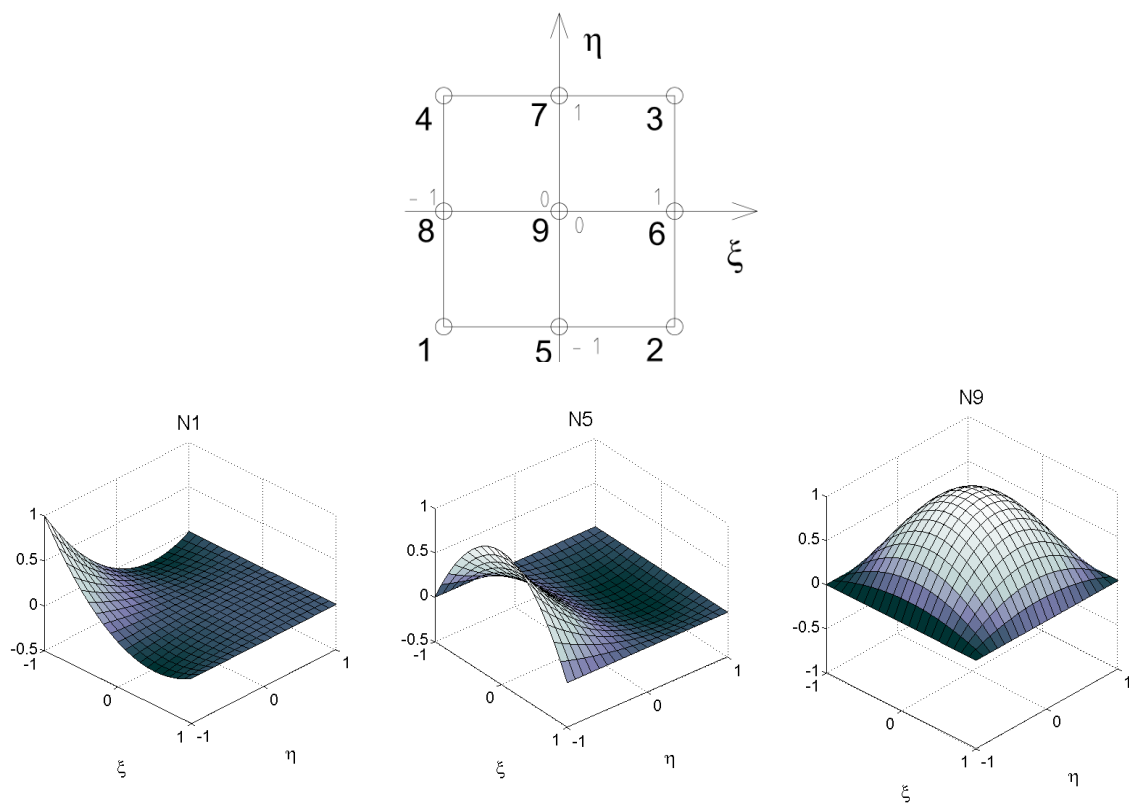
$$\{N^{Q4}\} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 - \xi - \eta + \xi\eta \\ 1 + \xi - \eta - \xi\eta \\ 1 + \xi + \eta + \xi\eta \\ 1 - \xi + \eta - \xi\eta \end{Bmatrix}^T \quad (2.17)$$

$$\left\{ \frac{\partial N^{Q4}}{\partial \eta} \right\} = \{-1 + \xi \quad -1 - \xi \quad 1 + \xi \quad 1 - \xi\} \quad (2.18)$$

$$\left\{ \frac{\partial N^{Q4}}{\partial \xi} \right\} = \{-1 + \eta \quad 1 - \eta \quad 1 + \eta \quad -1 - \eta\} \quad (2.19)$$

### 2.3.2 Tvarové funkce devíti-uzlového kvadratického prvku Q9

Devíti-uzlový prvek má kvadratické interpolační funkce  $\{N^{Q9}\} = \{N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8 \ N_9\}$ , jejichž tvar je zobrazen na obr. 2.5. Zleva pro rohový, středový a vnitřní uzel. Komplikovanější vztahy a vyšší nároky na výpočetní výkon jsou vyváženy lepší konvergencí. Díky vnitřnímu uzlu a příslušné interpolační funkci, která se někdy označuje jako „bublinová funkce“ (funkce nabývá nenulové hodnoty pouze uvnitř prvku), je prvek schopen čistého ohybu a netrpí tolik nedostatkem tzv. *smykového zamykání* [1]. Srovnání a podrobnější diskuze chování obou prvků je uvedena v dalších kapitolách.



Obrázek 2.5 Číslování a poloha uzlů prvku Q9, tvar interpolačních funkcí.

Interpolační funkce a jejich derivace v přirozených souřadnicích jsou uvedeny ve vztazích (2.20–2.22).

$$\{N^{Q9}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\xi\eta}{4} - \frac{\xi\eta^2}{4} - \frac{\xi^2\eta}{4} + \frac{\xi^2\eta^2}{4} \\ -\frac{\xi\eta}{4} + \frac{\xi\eta^2}{4} - \frac{\xi^2\eta}{4} + \frac{\xi^2\eta^2}{4} \\ \frac{\xi\eta}{4} + \frac{\xi\eta^2}{4} + \frac{\xi^2\eta}{4} + \frac{\xi^2\eta^2}{4} \\ -\frac{\xi\eta}{4} - \frac{\xi\eta^2}{4} + \frac{\xi^2\eta}{4} + \frac{\xi^2\eta^2}{4} \\ -\frac{\eta}{2} + \frac{\eta^2}{2} + \frac{\xi^2\eta}{2} - \frac{\xi^2\eta^2}{2} \\ \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi\eta^2}{2} - \frac{\xi^2\eta^2}{2} \\ \frac{\eta}{2} + \frac{\eta^2}{2} - \frac{\xi^2\eta}{2} - \frac{\xi^2\eta^2}{2} \\ -\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi\eta^2}{2} - \frac{\xi^2\eta^2}{2} \\ 1 - \xi^2 - \eta^2 + \xi^2\eta^2 \end{Bmatrix}^T \quad (2.20)$$

$$\left\{ \frac{\partial N^{Q9}}{\partial \eta} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\xi}{4} - \frac{\xi\eta}{2} - \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^2\eta}{2} \\ -\frac{\xi}{4} + \frac{\xi\eta}{2} - \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^2\eta}{2} \\ \frac{\xi}{4} + \frac{\xi\eta}{2} + \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^2\eta}{2} \\ -\frac{\xi}{4} - \frac{\xi\eta}{2} + \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^2\eta}{2} \\ -\frac{1}{2} + \eta + \frac{\xi^2}{2} - \xi^2\eta \\ -\xi\eta - \xi^2\eta \\ \frac{1}{2} + \eta - \frac{\xi^2}{2} - \xi^2\eta \\ \xi\eta - \xi^2\eta \\ -2\eta + 2\xi^2\eta \end{pmatrix}^T \quad (2.21)$$

$$\left\{ \frac{\partial N^{Q9}}{\partial \xi} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\eta}{4} - \frac{\eta^2}{4} - \frac{\xi\eta}{2} + \frac{\xi\eta^2}{2} \\ -\frac{\eta}{4} + \frac{\eta^2}{4} - \frac{\xi\eta}{2} + \frac{\xi\eta^2}{2} \\ \frac{\eta}{4} + \frac{\eta^2}{4} + \frac{\xi\eta}{2} + \frac{\xi\eta^2}{2} \\ -\frac{\eta}{4} - \frac{\eta^2}{4} + \frac{\xi\eta}{2} + \frac{\xi\eta^2}{2} \\ +\xi\eta - \xi\eta^2 \\ \frac{1}{2} + \xi - \frac{\eta^2}{2} - \xi\eta^2 \\ -\xi\eta - \xi\eta^2 \\ -\frac{1}{2} + \xi + \frac{\eta^2}{2} - \xi\eta^2 \\ -2\xi + 2\xi\eta^2 \end{pmatrix}^T \quad (2.22)$$

## 2.4 Matice tuhosti deskostěnového prvku a vektor transformovaného zatížení

Matice tuhosti se získá aplikací variačního principu (2.13) na potenciální energii vnitřních sil deskostěnového prvku:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_S \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dx dy \quad (2.23)$$



Integrál je pouze dvourozměrný, jelikož integrace po tloušťce desky je již obsažena v matici  $[D]$  (2.12). Pole neznámých deformací  $\{u\}$  (2.6) je aproximováno pomocí uzlových hodnot  $\{r_e\}$  a interpolačních funkcí podle vztahu:

$$\{u\} = [N]\{r_e\} \quad (2.24)$$

Kde matice  $[N]$  má tvar:

$$[N]_{5 \times 5n} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

vektor  $\{r_e\}$  :

$$\{r_e\} = \{u_1^0 \quad v_1^0 \quad w_1 \quad \varphi_{x1} \quad \varphi_{y1} \quad \dots \quad u_n^0 \quad v_n^0 \quad w_n \quad \varphi_{xn} \quad \varphi_{yn}\}^T \quad (2.26)$$

a  $n$  je počet uzlů prvku.

Dosazením (2.24) do (2.8) získáme vztah pro poměrné deformace vyjádřené pomocí uzlových posunů

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{r_e\} = [B]\{r_e\} \quad (2.27)$$

Po dosazení (2.27) do výrazu pro potenciální energii (2.23) a aplikaci variačního principu (2.13) získáme výsledný vztah pro matici tuhosti ve tvaru

$$K_e = \int_S [B]^T [D] [B] dx dy \quad (2.28)$$

Pro matici  $[B]$  platí:

$$[B]_{8 \times 5n} = [\partial][N] = [ [B_1] \quad [B_2] \quad \dots \quad [B_i] \quad \dots \quad [B_n] ] \quad (2.29)$$

Submatice  $[B_i]$  má tvar

$$[B_i]_{8 \times 5} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

a jejich počet je dán počtem uzlů prvku  $n$ . Před provedením derivací tvarových funkcí podle kartézských souřadnic, je potřeba určit inverzní matici k Jacobiho transformační matici  $[J]$ .

Pro derivaci funkce v jednotkových souřadnicích platí vztah [1]

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Inverzí vztahu (2.31) a roznásobením součinu získáme vztahy pro derivaci funkce v jednotkových souřadnicích podle proměnné  $x$  a  $y$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial x} &= \Gamma_{11} \cdot \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \Gamma_{12} \cdot \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial y} &= \Gamma_{21} \cdot \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \Gamma_{22} \cdot \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$[\Gamma] = [J]^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

$$\det(J) = J_{11} \cdot J_{22} - J_{12} \cdot J_{21}$$

Přitom pro Jacobiho matici platí:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\} \{x\} & \left\{ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\} \{y\} \\ \left\{ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\} \{x\} & \left\{ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\} \{y\} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Dosazením vztahů (2.32) do submatice  $[B_i]$  získáme výsledný tvar matice:

(2.34)

$$[B_i]_{8 \times 5} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} J_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - J_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 \\ J_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - J_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & J_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & 0 & J_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - J_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & J_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - J_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & J_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & |J| N_i \\ 0 & 0 & J_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - J_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & -|J| N_i & 0 \end{bmatrix}.$$

Integrál v rovnici (2.28) je potřeba převést pomocí jacobíanu do přirozených souřadnic a k jeho výpočtu se používá Gaussovo kvadrurní pravidlo.

$$\begin{aligned} K_e &= \int_S [B]^T [D] [B] dx dy = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det(J) d\xi d\eta \cong \\ &\cong \sum_i^m \sum_j^n [B(\xi_i, \eta_j)]^T [D] [B(\xi_i, \eta_j)] \det(J(\xi_i, \eta_j)) w_i w_j \end{aligned} \quad (2.35)$$

Gaussouva numerická integrace nahrazuje integrál sumací součinu funkčních hodnot a váhového koeficientu. Počet integračních bodů je dán stupněm polynomu integrované funkce. Pro úplnou integraci matice tuhosti devíti-uzlového prvku je potřeba 3x3 integračních bodů, zatímco u čtyř-uzlového prvku postačí k úplné integraci pouze 2x2 integračních bodů [1]. Souřadnice integračních bodů a příslušné váhové koeficienty pro Gaussovu kvadraturu druhého a třetího stupně jsou uvedeny v tabulce 2.1.

Počet integračních bodů	Souřadnice integračního bodu	váhový koeficient $w_i$
<b>Gaussova kvadratura druhého stupně</b>		
$2 \times 2$	$\pm\sqrt{1/3}$	1
<b>Gaussova kvadratura třetího stupně</b>		
$3 \times 3$	$\pm\sqrt{3/5}$	5/9
	0	8/9

Tabulka 2.1. Umístění integračních bodů a hodnoty váhových koeficientů.

Vektor transformovaného zatížení lze odvodit aplikací variačního principu (2.13) na potenciální energii vnějších sil vyjádřenou pomocí aproximace pole deformací a tvoří pravou stranu rovnice (2.14). Pokud se objemové síly zanedbají, nebo nahradí plošným zatížením, platí pro vektor sil  $\{F_e\}$ [2]

$$\begin{aligned}
 \{F_e\} &= \int_S [N]^T \{p\} dS = \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \{p\} \det(J) d\xi d\eta \cong \\
 &\cong \sum_i \sum_j [N(\xi_i, \eta_j)]^T \{p(\xi_i, \eta_j)\} \det(J(\xi_i, \eta_j)) w_i w_j
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Vektor plošného zatížení obsahuje pět složek

$$\{p\}(\xi, \eta) = \{\overline{p_x} \quad \overline{p_y} \quad \overline{p_z} \quad \overline{m_x} \quad \overline{m_y}\}^T \tag{2.37}$$

Výsledný algoritmus pro výpočet matice tuhosti prvku a vektoru zatížení je uveden v příloze 1.

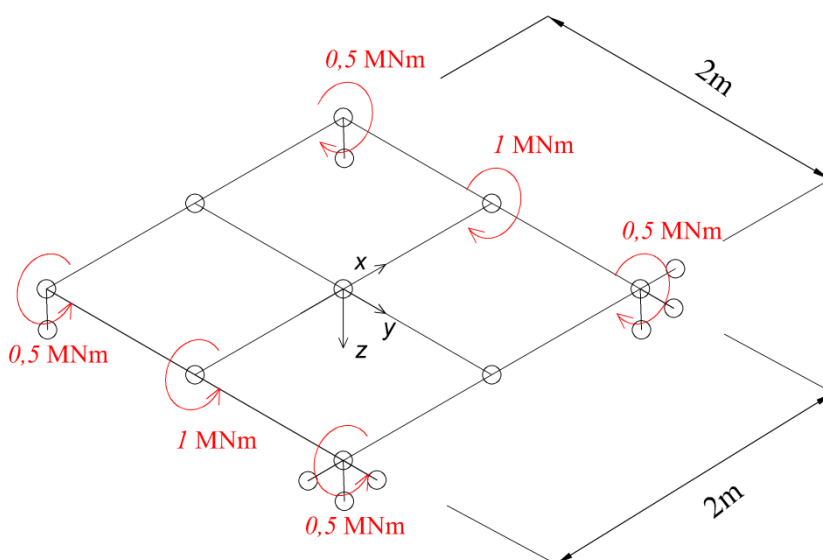
## 2.5 Smykové zamykání a vlastnosti izoparametrických prvků

U odvozených izoparametrických prvků dochází k tzv. smykovému zamykání, které způsobuje, že model MKP je výrazně tužší a výsledné průhyby jsou menší, než by měly být. Tento defekt se tím více projevuje, čím je síť hrubší a relativní tloušťka prvku menší. Je způsoben nadhodnocením členů matice tuhosti, které se určují ze smykového napětí [1]. Podstata smykového zamykání bude ukázána na numerickém příkladu desky v čistém ohybu.

### 2.5.1 Příklad 1: Deska v čistém ohybu

#### Zadání úlohy

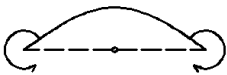
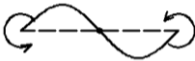
Síť konečných prvků a okrajové podmínky jsou zobrazeny na obr. 2.6. Jedná se o čtvercovou desku o rozměrech  $2 \times 2$  m, která je prostě podepřena v rozích, tak aby se mohla volně ohýbat. Zatížena je pouze koncovými momenty  $M_y$  a je rozdělena pravidelnou sítí tvořenou devíti uzly. Porovnány jsou dva případy. V prvním je deska modelována pomocí čtyř prvků Q4 a ve druhém ji tvoří jediný prvek Q9. Numerické hodnoty vstupních veličin jsou uvedeny jen pro úplnost. Modul pružnosti  $E = 30$  GPa, Poissonův součinitel  $\nu = 0,2$ , tloušťka desky  $t = 0,2$  m.



Obrázek 2.6 Schéma sítě a okrajových podmínek.

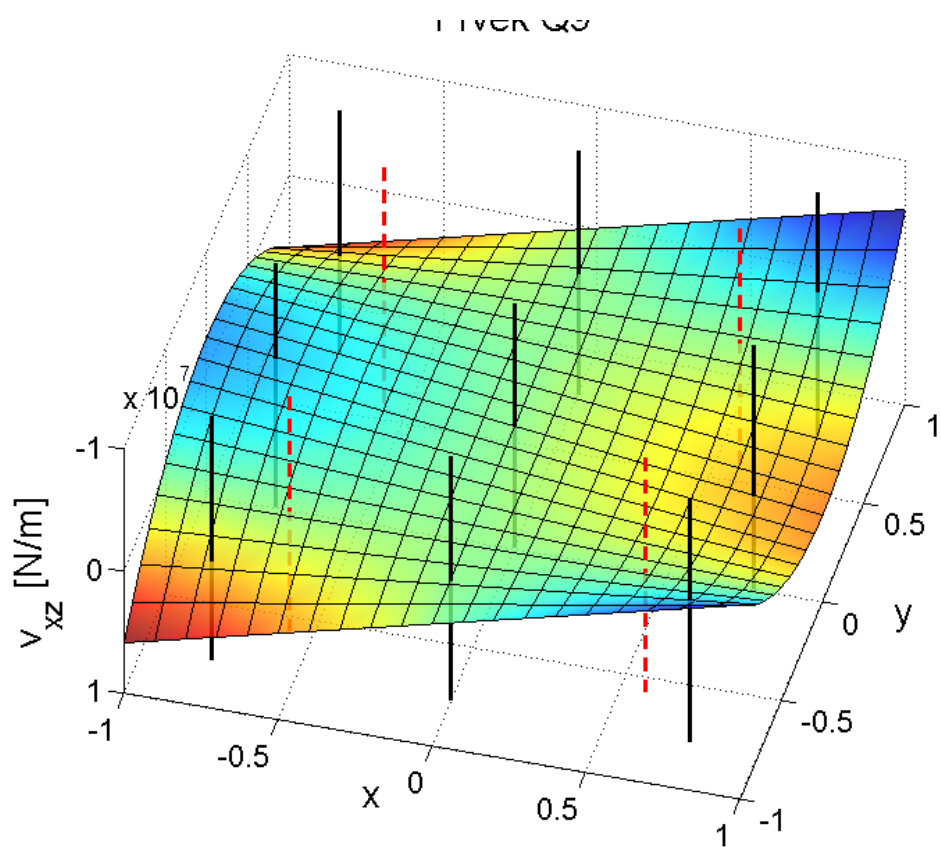
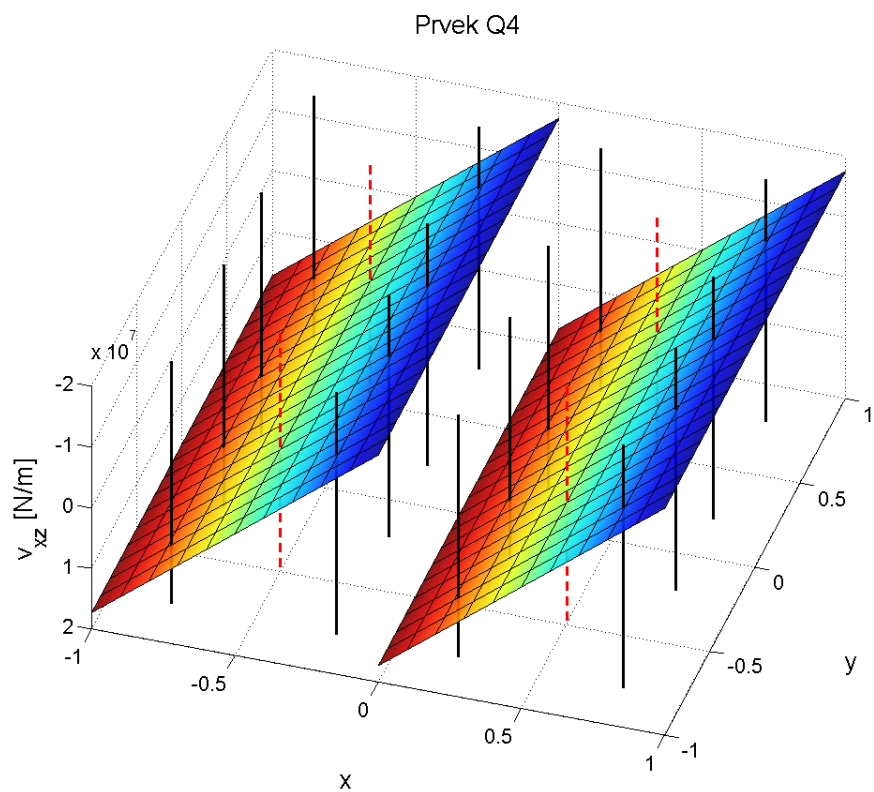
Protože se jedná o případ čistého ohybu, působí v desce po měrný ohybový moment  $m_x = 1 \text{ MNm/m}$ , posouvající síla  $v_{xz}$  by měla být nulová. Výpočtem na velmi jemné síti v softwaru

SCIA Engineer vychází průhyb ve vnitřním uzlu  $w = -0,020\text{m}$ . Tato hodnota je brána jako referenční pro srovnání. V prvním případě (prvek Q4) vychází průhyb ve vnitřním uzlu  $w_1 = -0,0025\text{m}$ , tedy řádově méně. Ve druhém případě (prvek Q9) vychází průhyb ve vnitřním uzlu  $w_2 = -0,0215\text{m}$ . Je nutné dodat, že tento případ zatížení je pro devíti-uzlový prvek příznivý. Kdyby měly vnější momenty stejný směr a vnitřní moment by se tím pádem měnil lineárně, shoda výsledků by nebyla zdaleka tak dobrá. Viz tabulka 2.2.

Schéma zatížení	Typ prvku	Průhyb vnitřního uzlu $w[\text{mm}]$	Natočení vnitřního uzlu $\varphi [\text{mrad}]$	Chyba vztažená k $w = -20 \text{ mm}$	Chyba vztažená k $\varphi = 5,72 \text{ mrad}$
	Q4	-2,5	0	87,5%	-
	Q9	-21,5	0	7,5%	-
	Q4	0	1,46	-	75%
	Q9	0	7,38	-	29%

Tabulka 2.2. Srovnání výsledků vybraných deformací pro konstantní a lineárně se měnící moment s použitím prvků Q4 a Q9.

Na obrázku 2.7 je vykreslen průběh smykových sil  $v_{xz}$  pro oba modely. Smyková síla by správně měla být nulová po celé ploše desky. V prvním případě je průběh lineární po částech spojitý, zatímco ve druhém případě je průběh kvadratický. Dále je černými čarami vyznačena poloha všech integračních bodů nejnižšího kvadraturního pravidla potřebného k přesné integraci matice tuhosti. Je zřejmé, že v žádném z těchto integračních bodů není smyková síla nulová. Z porovnání velikosti smykové síly v těchto integračních bodech na prvku Q4 a Q9 vyplývá i skutečnost, že prvek Q9 je mnohem méně náchylný ke smykovému zamykání a jeho konvergence je při zvětšování počtu prvků mnohem rychlejší, než je tomu u prvku Q4. Červenými čarami je vyznačena poloha integračních bodů Gaussova pravidla o stupeň nižšího, než jaký je potřebný pro přesnou integraci v rovnici (2.28). Právě v těchto bodech nabývá smyková síla správné nulové hodnoty na obou typech izoparametrických prvků.



Obrázek 2.7. Průběh smykových sil  $v_{xz}$  na desce.

Z této skutečnosti vychází dvě opatření proti smykovému zamykání tzv. *redukováná integrace* a *selektivní integrace*. První spočívá v prostém použití kvadratury nižšího stupně pro výpočet celé matice tuhosti prvku. Druhá spočívá v rozkladu matice na ohybovou a smykovou část podle rovnice (2.38) [1]. Ohybová část se poté integruje standardně, zatímco smyková část, která způsobuje smykové zamykání, se integruje s použitím kvadraturního pravidla o stupeň nižšího.

$$K_e = K_b + K_s = \int_S [B_b]^T [D] [B_b] dS + \int_S [B_s]^T [D] [B_s] dS \quad (2.38)$$

Matice  $[B_b]$  se získá z původní matice  $[B]$  tak, že se vynulují poslední dva řádky, které odpovídají smykovým zkosením  $\gamma_{xz}$  a  $\gamma_{yz}$ . Matice  $[B_s]$  vznikne vynulováním všech řádků původní matice  $[B]$  kromě posledních dvou. Algoritmus pro výpočet matice tuhosti prvku pomocí selektivní integrace je uveden v příloze 2.

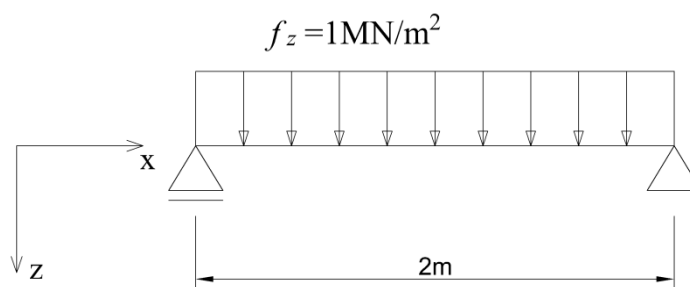
Selektivní nebo redukováná integrace odstraňuje problém s příliš vysokou tuhostí prvků při výpočtu tenkých desek. Ovšem přináší problémy, které se mohou projevit jen při určité konfiguraci sítě konečných prvků a okrajových podmínek. Použitím integračního pravidla nižšího stupně způsobuje snížení hodnoty matice tuhosti, tedy lineární závislost některých řádků. To se projevuje vznikem vnitřního mechanismu, který není spojen s žádnou tuhostí. Při tom u redukové integrace vzniká těchto deformačních módů více než při použití selektivní integrace. U čtyř-uzlového prvku má tento mód podobu zkroucení prvku. Ve výpočtu se to pak projeví v případě, že vnitřním stupňům volnosti nebudou bránit nadbytečné podpory. Nadbytečnými podporami jsou v tomto případě myšleny podpory, které nejsou nutné k zajištění statické určitosti konstrukce jako celku. Globální matice tuhosti se stane singulární a výpočet selže. Z tohoto důvodu také není možné použít selektivní integraci ve výše uvedeném příkladu. Problémy mohou nastat ale i v případě, že je konstrukce dostatečně podepřená i se započítáním vnitřních mechanismů. Jelikož jsou tyto módy navzájem komunikativní mezi připojenými prvky, mohou být vybudeny například soustředěným zatížením v případě, kdy je relativní vzdálenost od podpor dostatečně velká [1]. Projev těchto deformačních módů je ukázán v dalším numerickém příkladu viz obr. 2.10.



### 2.5.2 Příklad 2: Prostě podepřená čtvercová deska

Pro porovnání konvergence a vlivu smykového zamykání byl řešen průhyb prostě podepřené desky zatížené rovnoměrným zatížením s různou hustotou dělení sítě.

#### Zadání úlohy

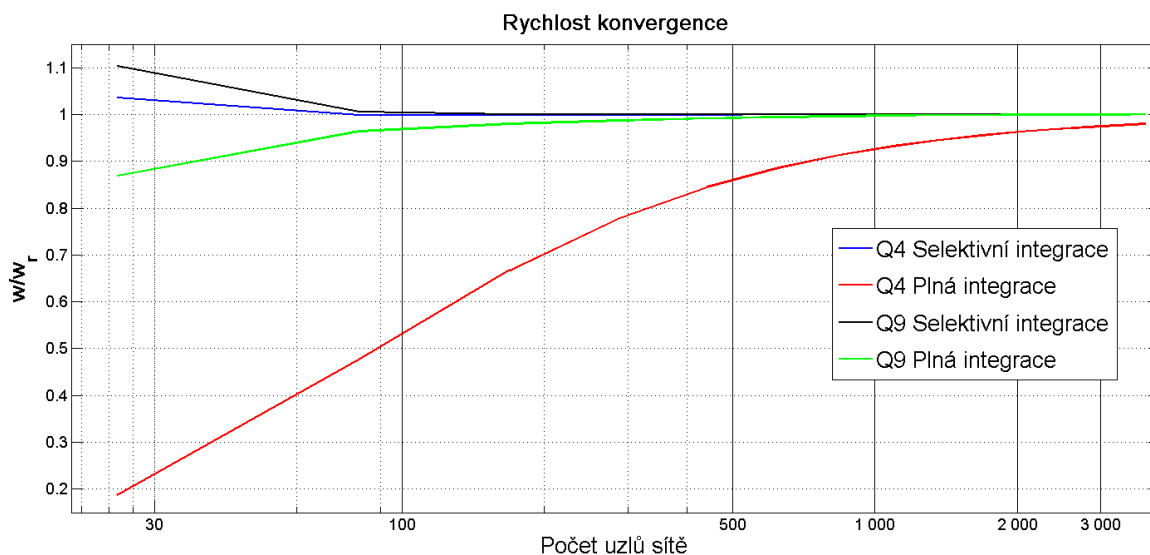


Obrázek 2.8. Statické schéma. Řez deskou ve směru osy  $x$ .

Jedná se o čtvercovou desku o rozměrech  $2 \times 2$  m, která je prostě podepřená na okrajích. Zatížena je rovnoměrným zatížením o intenzitě  $f_z = 1 \text{ MN/m}^2$ . Modul pružnosti  $E = 30 \text{ GPa}$ , Poissonův součinitel  $\nu = 0,2$ , tloušťka desky  $t = 0,1 \text{ m}$ .

Síť prvků je pravidelná s různou hustotou od 25 až do 3721 uzlů. Jedná se o tenkou desku ( $t/l = 1/20$ ), u které se projevuje smykové zamykání. Jako srovnávací hodnota průhybu bylo bráno řešení pomocí MKP softwaru SCIA Engineer, ve kterém byla deska namodelována  $100 \times 100$  prvky. Výsledný průhyb s vlivem smyku je  $w_r = 26,468 \text{ mm}$ .

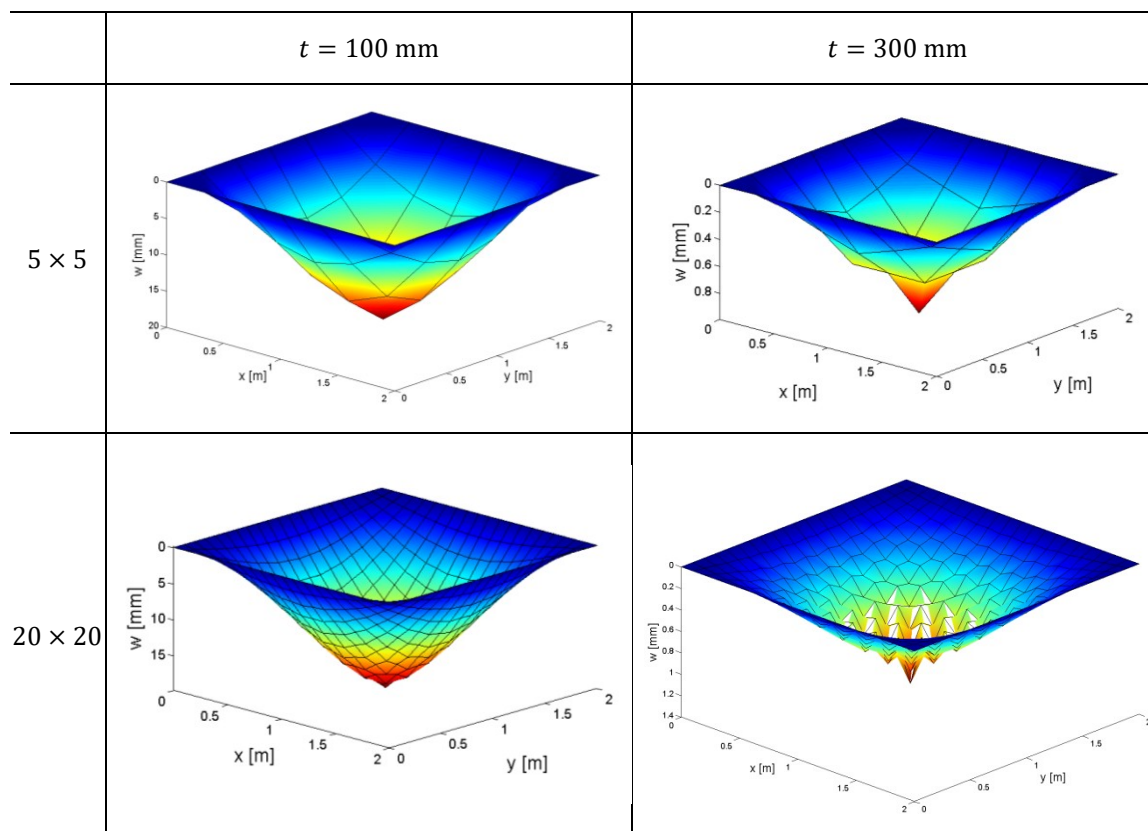
Na obr. 2.9 je zobrazena závislost výsledného průhybu na hustotě dělení sítě. V grafu je vidět, že při použití selektivní integrace numerické řešení konverguje shora. Jinými slovy tuhost prvků je nižší a výsledné deformace jsou vyšší. Při použití plné integrace numerické řešení konverguje zdola, jak je u deformační varianty MKP obvyklé. Při porovnání obou způsobů integrace u prvku Q9 je zřejmé, že selektivní integrace nepřináší významné zlepšení konvergence, protože tento prvek není tolik náchylný ke smykovému zamykání. U čtyř-uzlového prvku je přínos selektivní integrace výrazný. Při použití plné integrace u tenkých deskách jsou výsledky s výjimkou extrémně jemné sítě v podstatě nepoužitelné.



Obrázek 2.9. Srovnání rychlosti konvergence při zvětšování počtu prvků.

Selektivně integrovaný prvek konverguje velmi rychle, ale jeho použití není spolehlivé. Pokud se deska zatíží osamělou silou uprostřed, vybudí toto zatížení nepravý deformační mód. Příčiny tohoto chování byly popsány výše. Na obr. 2.10 je zobrazena deformovaná prostě podepřená deska, která je ve středu zatížena silou 1 MN.

#### Deformovaná konstrukce



Obrázek 2.10. . Nepravý deformační mód desky modelované prvkem Q4 při použití selektivní integrace.

Jednotlivé prvky jsou navzájem zkroucené a průhybová plocha není hladká. Navýšením počtu prvků sítě se vzájemné zkroucení projeví ještě více. Se zvětšující se tloušťkou desky je tato deformace také zřetelnější. A při kombinaci tlusté desky a jemné sítě je výsledná průhybová plocha zřejmě nesmyslná, jak je vidět na obrázku vpravo dole. Pokud by deska spočívala na pružném podkladu, pravděpodobně by se tento problém neprojevil. Ale mohl by nastat, pokud by se část desky nadzvedla nad povrch podloží.

## 2.6 Výpočet vnitřních sil na desce

Výpočet vnitřních sil probíhá v algoritmu MKP po vyřešení globální soustavy rovnic po jednotlivých prvcích. Z globálního vektoru neznámých deformačních veličin  $r_g$  se získají výsledky, které přísluší k odpovídajícím uzlům prvku. Spojením geometrických rovnic (2.27) a fyzikálních rovnic (2.10) se získá vztah pro výsledné vnitřní síly.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{r_e\} \quad (2.39)$$

Matice  $[B]$  obsahuje tvarové funkce a jejich derivace, které jsou spojitě na celé oblasti prvku, a tím umožňuje vypočítat vnitřní síly v libovolném bodu prvku. Extrémní hodnoty vnitřních sil se většinou vyskytují na hranici, a proto je potřeba vypočítat hodnoty vnitřních sil v uzlech prvku. Prosté dosazení přirozených souřadnic uzlů do vztahu (2.39) však vede na nepřesné výsledky, protože derivací aproximovaného pole deformací se zvyšuje chyba přibližného řešení. Hodnoty vnitřních sil jsou nejméně zatížené chybou plynoucí z aproximace v bodech Gaussovy kvadratury [1]. Vnitřní síly se tedy vypočítají v těchto bodech a následně se extrapolují do uzlů prvku. Počet Gaussových integračních bodů je shodný s počtem uzlů prvku. Proto je možné použít pro extrapolaci stejné aproximační funkce jako pro aproximace pole deformací.

Pro matematické vyjádření je zavedeno následující označení. Index  $i$  označuje číslo uzlu prvku, index  $j$  označuje číslo Gaussova integračního bodu a počet uzlů prvku je  $n$ . Vnitřní síly v uzlech jsou uspořádány do matice:

$$[\sigma^N]_{n \times 8} = [\{\sigma_1\} \{\sigma_2\} \cdots \{\sigma_i\} \cdots \{\sigma_n\}]^T \quad (2.40)$$

Vypočítané vnitřní síly v Gaussových integračních bodech jsou uspořádány do matice:

$$[\sigma^G]_{n \times 8} = [\{\sigma_1\} \{\sigma_2\} \cdots \{\sigma_j\} \cdots \{\sigma_n\}]^T \quad (2.41)$$

Tvarové funkce prvku vyčíslené v souřadnicích integračních bodů jsou uspořádány do matice:

$$[N^G]_{n \times n} = \left[ \{N(\xi_1, \eta_1)\}^T \{N(\xi_2, \eta_2)\}^T \cdots \{N(\xi_j, \eta_j)\}^T \cdots \{N(\xi_n, \eta_n)\}^T \right]^T \quad (2.42)$$

Po zavedení tohoto označení lze platí pro vypočítané vnitřní síly v integračních bodech následující maticová rovnice:

$$[\sigma^G]_{n \times 8} = [N^G]_{n \times n} [\sigma^N]_{n \times 8} \quad (2.43)$$

Extrapolace vnitřních sil do uzlů prvku se provede inverzí vztahu (2.43)

$$[\sigma^N]_{n \times 8} = [N^G]_{n \times n}^{-1} [\sigma^G]_{n \times 8} \quad (2.44)$$

Navržený postup má výhodu v tom, že není potřeba zavádět nové funkce pro extrapolaci. Všechny prvky matice  $[N^G]_{n \times n}$  jsou už v algoritmu vyčísleny při tvorbě matice  $[B]$ . Stačí pouze vypočítat soustavu rovnic (2.44).

Při výpočtu smykových sil na izoparametrických prvcích nastává stejný problém, který byl popsán už v kapitole o smykovém zamykání. A sice, že smykové síly nabývají správných hodnot v integračních bodech Gaussovy kvadratury o stupeň nižší, než která se používá k úplné integraci matice tuhosti a vyhodnocení zbylých vnitřních sil. Viz průběh smykových sil na obr. 2.7. U devíti-uzlového prvku tak získáme hodnoty pouze ve čtyřech bodech a výše navržená extrapolace pomocí devíti funkcí nelze provést. Pro extrapolaci ze čtyř hodnot lze podle [1] zavést extrapolační funkce, které vycházejí z tvarových funkcí prvku Q4 a získají se tak, že proměnné  $\xi$  a  $\eta$  se vydělí vzdáleností integračních bodů od počátku (hodnotou  $1/\sqrt{3}$ ). Výsledné funkce použité pro extrapolaci smykových sil jsou

$$\{N^{EXT}(\xi, \eta)\} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 - \sqrt{3}\xi - \sqrt{3}\eta + 3\xi\eta \\ 1 + \sqrt{3}\xi - \sqrt{3}\eta - 3\xi\eta \\ 1 + \sqrt{3}\xi + \sqrt{3}\eta + 3\xi\eta \\ 1 - \sqrt{3}\xi + \sqrt{3}\eta - 3\xi\eta \end{Bmatrix}^T \quad (2.45)$$

Extrapolaci lze potom zapsat maticovou rovnicí:

$$[\sigma^N]_{n \times 8} = \begin{bmatrix} N^{EXT}(\xi_1, \eta_1) \\ N^{EXT}(\xi_2, \eta_2) \\ \vdots \\ N^{EXT}(\xi_i, \eta_i) \\ \vdots \\ N^{EXT}(\xi_n, \eta_n) \end{bmatrix}_{n \times 4} [\sigma^G]_{4 \times 8} \quad (2.46)$$

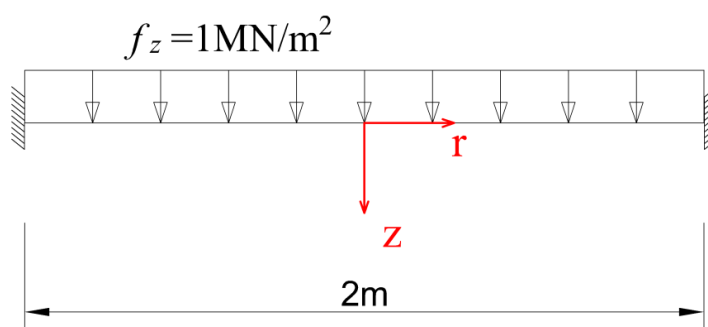
U čtyř-uzlového prvku získáme pouze jednu hodnotu smykových sil uprostřed prvku, kterou nelze extrapolovat. Jedinou možností vyhlazení výsledků je průměrování mezi okolními

prvky, což je při vyhodnocování výsledků po jednotlivých prvcích nepraktické. Z tohoto důvodu a také kvůli nespolehlivému chování, které bylo popsáno výše, byl nadále při rozvíjení výpočetního programu použit jen devíti-uzlový prvek Q9 a úplná integrace matice tuhosti. Algoritmus výpočtu vnitřních sil na prvku je uveden v příloze 3.

### 2.6.1 Příklad 3: Kruhová deska.

Pro ověření výsledných vnitřních sil získaných výše uvedeným postupem z MKP výpočtu je v následující úloze srovnání s analytickým řešením tenké rotačně symetrické desky podle Kirchhoffovy teorie.

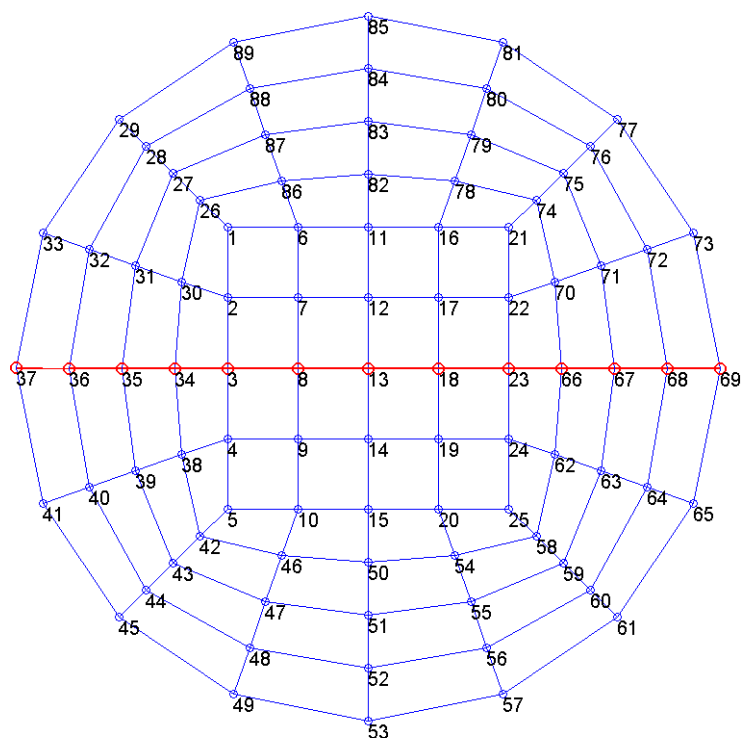
#### Zadání úlohy



Obrázek 2.11. Statické schéma. Řez deskou ve směru osy  $x$ .

V úloze je řešena rotačně symetrická deska, která je na okrajích vetknutá a je zatížena rovnoměrným spojitým zatížením o intenzitě  $f_z = 1 \text{ MN/m}^2$ . Statické schéma je zobrazeno na obr. 2.11. Modul pružnosti  $E = 210 \text{ GPa}$ , Poissonův součinitel  $\nu = 0,3$ , tloušťka desky  $t = 0,1 \text{ m}$ .

Síť konečných prvků, která byla vytvořena z pěti bloků metodou tzv. *transfinitní interpolace* (TFI) [4], je zobrazena na obr. 2.12. Uzly, ve kterých jsou vyhodnocovány vnitřní síly, jsou na obrázku vyznačeny červeně. Tento řez byl zvolen, aby bylo možné porovnat numerické výsledky v kartézských souřadnicích s analytickým řešením v polárních souřadnicích bez nutnosti vnitřní síly transformovat. Osa  $x$  má radiální směr a osa  $y$  má tangenciální směr. MKP výpočet byl opět proveden s prvkem Q4 i s prvkem Q9. V případě prvku Q4 byla použita selektivní integrace, jelikož se jedná o tenkou desku. V případě prvku Q9 byla použita plná integrace pomocí devíti integračních bodů.



Obrázek 2.12. MKP Síť kruhové desky s vyznačeným řezem pro vykreslení výsledků

## Analytické řešení

Analytické řešení desek není předmětem této práce, a proto je zde uvedený jen stručný postup odvození výsledných vztahů pro vnitřní síly.

Desková rovnice rotačně symetrické tenké desky v polárních souřadnicích [2]

$$w(r) = w_0(r) + C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln(r) + C_4 r^2 \ln(r) \quad (2.47)$$

Partikulární řešení pro rovnoměrné spojitě zatížení:

$$w_0(r) = \frac{f_z r^4}{64D} \quad (2.48)$$

Integrační konstanty  $C_3$  a  $C_4$ :

Pro  $r = 0 \quad w \rightarrow \infty \Rightarrow C_3 = 0$

Derivace rovnice průhybu:

$$w'(r) = \frac{f_z r^3}{16D} + 2C_2 r + C_4 \frac{1}{r} \quad (2.49)$$

Pro  $r = 0 \quad w' \rightarrow \infty \Rightarrow C_4 = 0$

Integrační konstanty  $C_1$  a  $C_2$  z okrajových podmínek:

Pro  $r = a = 1\text{m}$ :

$$\begin{aligned}w(r) &= \frac{f_z a^4}{64D} + C_1 + C_2 a^2 = 0 \\w'(r) &= \frac{f_z a^3}{16D} + 2C_2 a = 0 \\C_2 &= -\frac{f_z a^2}{32D} \\C_1 &= \frac{f_z a^4}{64D}\end{aligned}\tag{2.50}$$

Výsledná rovnice průhybu rotačně symetrické vetknuté desky zatížené rovnoměrným spojitým zatížením:

$$w(r) = \frac{f_z r^4}{64D} + \frac{f_z a^4}{64D} - \frac{f_z a^2}{32D} r^2 = \frac{f_z}{64D} (a^2 - r^2)^2\tag{2.51}$$

Ohybový moment v radiálním směru:

$$m_r(r) = -D \left( w'' + \nu \frac{w'}{r} \right) = \frac{f_z}{16} [(1 + \nu)a^2 - (3 + \nu)r^2]\tag{2.52}$$

Ohybový moment v tangenciálním směru:

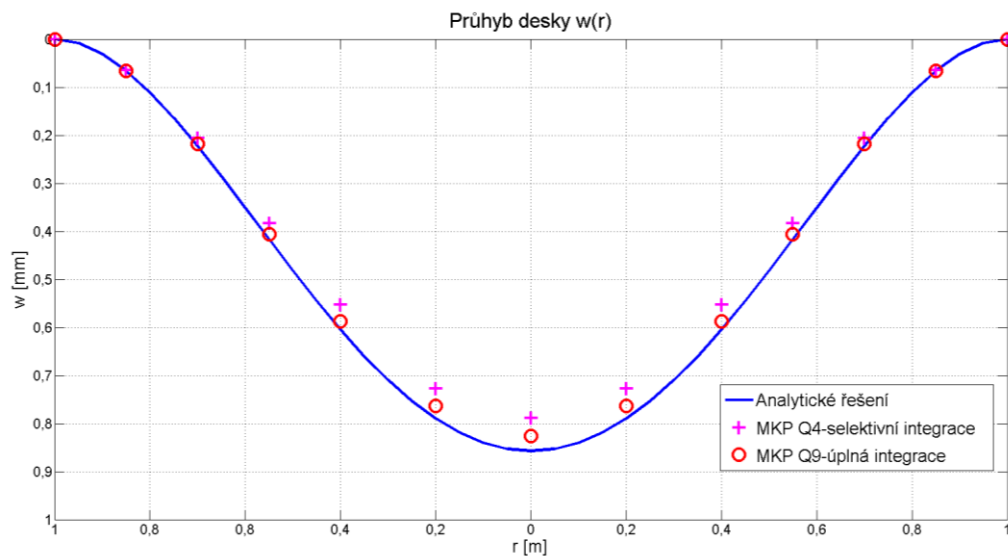
$$m_t(r) = -D \left( w'' + \nu \frac{w'}{r} \right) = \frac{f_z}{16} [(1 + \nu)a^2 - (1 + 3\nu)r^2]\tag{2.53}$$

Posouvající síla v radiálním směru:

$$v_{rz}(r) = -D \left( w''' + \frac{1}{r} w'' - \frac{1}{r^2} w' \right) = -\frac{1}{2} f_z r\tag{2.54}$$

Na obr. 2.13 je hladkou modrou křivkou vykreslen průhyb desky v závislosti na vzdálenosti od středu podle analytického řešení deskové rovnice. Bodově jsou vyneseny hodnoty průhybu ve sledovaných uzlech sítě z numerického řešení MKP. Při použití stejného počtu uzlů vykazuje vyšší devíti-uzlový prvek výrazně lepší schodu s analytickým řešením a to i přes to, že u čtyř-uzlového prvku byla použita selektivní integrace. V předchozím příkladu pravidelné čtvercové sítě, kde se neprojevovala chyba z aproximace tvaru, byla situace opačná (viz 2.9). Na tomto příkladu je ukázáno, že chování vyššího prvku Q9, je méně náchylné na zdeformování tvaru. Navíc devíti-uzlový prvek poměrně přesně aproximuje hranici kruhové

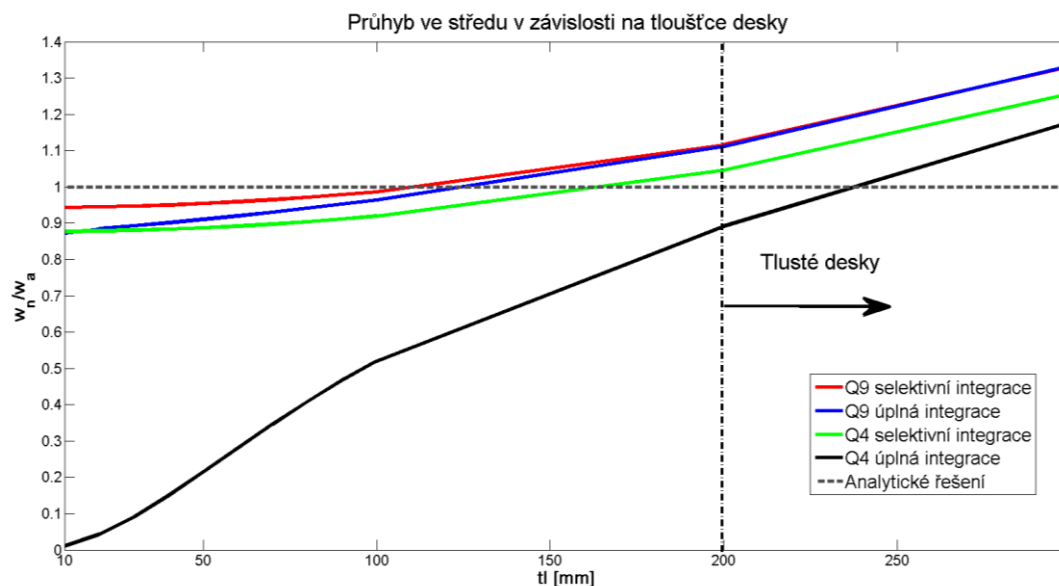
desky parabolou druhého stupně, zatímco čtyř-uzlový prvek aproximuje tvar kruhové desky mnohoúhelníkem.



Obrázek 2.13. Průhyb desky v závislosti na vzdálenosti od středu.

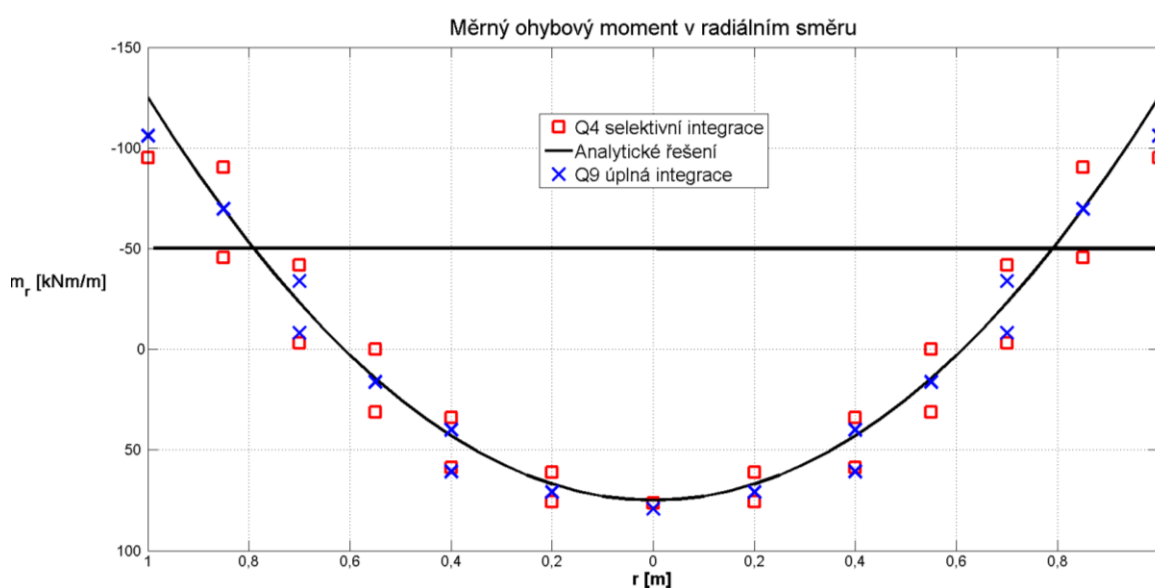
Jako poslední dodatek k tématu smykového zamykání, byla u této sítě konečných prvků sledována odchylka od analytického řešení v závislosti na tloušťce desky. Tato závislost je zobrazena v grafu na obr. 2.14. Na vodorovné ose je vynesena tloušťka desky a na svislé ose je vynesena poměr mezi hodnotou průhybu z numerického výpočtu a hodnotou z analytického řešení ve středu desky. V grafu je vidět, že největší chyba je u velmi tenkých desek, což je způsobeno smykovým zamykáním. Poté se chyba s rostoucí tloušťkou zmenšuje a po překročení určité tloušťky, která leží někde v intervalu  $\langle l/20; l/10 \rangle$  se chyba opět zvětšuje, protože s rostoucím vlivem smyku na deformace se zvětšuje i rozdíl mezi řešením podle Kirchhoffovy a podle Mindlinovy teorie.



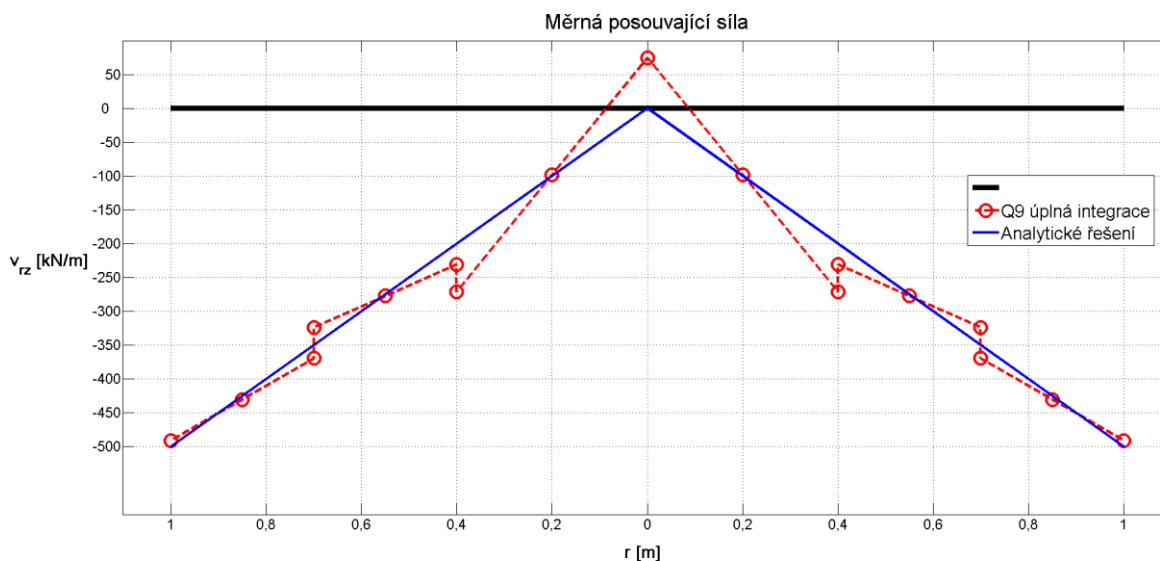


Obrázek 2.14. Průhyb desky v závislosti na vzdálenosti od středu.

Na obrázcích 2.15 a 2.16 jsou vyneseny hodnoty měrných vnitřních sil získaných postupem popsaným v úvodu této kapitoly. Rozdíl mezi numerickým a analytickým řešením je u vnitřních sil větší než u deformačních veličin, což je způsobeno tím, že pole napětí je odvozeno derivováním z pole deformací. Navíc v uzlech spojujících více prvků vznikají nespojitosti, protože hodnoty v krajních uzlech jsou přibližně extrapolované z vnitřních bodů Gaussovy kvadratury z přilehlých prvků. Přitom u prvku Q4 je nespojitost mnohem výraznější než u prvku Q9. Pro dosažení hladších výsledků by se musela zjemnit síť prvků, nebo by se musely hodnoty v uzlech sítě průměrovat.



Obrázek 2.15. Měrný ohybový moment  $m_r$  ve sledovaném řezu.



Obrázek 2.16. Měrný ohybový moment  $v_{rz}$  ve sledovaném řezu.

V grafu posouvajících sil na obr. 2.16 je srovnání analytického řešení pouze s numerickými výsledky prvku Q9, protože z výše uvedených důvodů nelze u prvku Q4 extrapolovat posouvající síly do uzlů ve sledovaném řezu.

## 2.7 Modelování podloží

U staticky neurčitých konstrukcí vzniká vlivem nerovnoměrného sedání základů mechanické namáhání (vnitřní síly, napětí). Proto je potřeba řešit úlohu interakce mezi horní stavbou a podložím. Stlačitelné podloží si lze představit jako pružný poloprostor ohraničený plochou povrchu. Podloží je možné modelovat pomocí klasických prostorových konečných prvků. Pokud se v blízkosti základové spáry nenachází nestlačitelná vrstva, vyvstává otázka jak velkou oblast je potřeba modelovat. I pro relativně malou oblast je počet stupňů volnosti u prostorových prvků neúměrně vysoký k rozměru úlohy konstrukce nad podložím, která může být modelována pomocí 1D a 2D prvků. Tento problém lze vyřešit například kombinací metody konečných prvků s metodou hraničních prvků, nebo použitím speciálních nekonečných prvků. Tyto prvky jsou podobné izoparametrickým prvkům, ale pro transformaci geometrie z jednotkového obrazce používají mapovací funkce, které posouvají některé uzly do nekonečna [1].

Pokud není cílem výpočtu co nejlépe vystihnout napjatost horninového prostředí, které tvoří podloží konstrukce, lze pro výpočet vnitřních sil v konstrukci a kontaktního napětí použít zjednodušený povrchový model. Tímto postupem se prostorová úloha redukuje na

dvourozměrnou. Nejjednodušším takovým modelem je *Winklerův model*, který předpokládá lineární závislost mezi kontaktním napětím a sednutím povrchu a zjednodušuje tak chování podloží na Hookův zákon v jednoosé napjatosti. Pro kontaktní napětí platí vztah:

$$\sigma_k(x, y) = C_1 \cdot w(x, y) \quad (2.55)$$

Tento model si lze představit jako soustavu lineárních diskrétních pružin. V případě rovnoměrného zatížení dojde také k rovnoměrnému zatlačení a nevznikne typická poklesová kotlina. Tento model není příliš výstižný, protože se deformuje pouze podloží přímo pod základovou konstrukcí, podloží mimo základovou konstrukci zůstává nedeformované a základovou konstrukci nijak neovlivňuje. Tento nedostatek odstraňuje dvouparametrický *Pasternakův model* podloží, který navíc zavádí smykové síly a vystihuje lépe působení podloží i mimo základovou konstrukci. Tento model je podrobněji popsán s odvozením potřebných vztahů v další podkapitole, protože byl použit ve vytvořeném algoritmu pro řešení desek na podloží.

I když povrchové plošné modely neumožňují dostatečně přesně stanovit napjatost v celé aktivní zóně, stále se využívají pro stanovení vnitřních sil v konstrukci horní stavby, protože dostatečně přesně vystihují velikost a tvar deformace povrchu podloží. V literatuře [2] je uveden postup jak pomocí jednoduchého jednaparametrického modelu lépe vystihnout interakci mezi základovou konstrukcí a podložím. Hlavní myšlenka spočívá v rozdělení úlohy na výpočet modelu konstrukce na Winklerově podloží a na výpočet sedání podloží. Pro kontaktní napětí vypočítané na Winklerově podloží se určí sednutí povrchu podle složitějších vztahů (např. vztahy pro pružný poloprostor, numerická integrace normových vztahů). Poté se z deformace povrchu a kontaktního napětí zpětně určí nová hodnota parametru  $C_{1z}$  podle vztahu (2.55), který vstupuje znovu do původního výpočtu. Výpočet se iteračně opakuje, dokud není dosaženo rovnováhy sil. Parametr  $C_{1z}$  v tomto případě už není konstanta, ale je funkcí souřadnic  $x$ ,  $y$  a je potřeba její hodnotu určit v každém integračním bodě MKP výpočtu. Obdobným způsobem je interakční úloha zavedena i v modulu SOILIN v softwaru Scia Engineer.

## 2.8 Pasternakův model podloží

Tento model zjednodušuje pružné podloží tak, že zanedbává deformace ve vodorovné rovině, jejichž energie je oproti svislé deformaci malá.

$$u(x, y, z) = 0 \quad v(x, y, z) = 0 \quad (2.56)$$

Dále předpokládá, že svislou deformaci v aktivní zóně lze vyjádřit pomocí součinu deformace povrchu  $w(x, y)$  a tzv. útlumové funkce  $\psi(z)$ .

$$w(x, y, z) = w(x, y) \cdot \psi(z) \quad (2.57)$$

Útlumová funkce je zobrazena na obr. 2.17. Na povrchu nabývá hodnoty  $\psi(z = 0) = 1$  a v hloubce aktivní zóny  $h$  hodnoty  $\psi(z = h) = 0$ . Po dosazení vztahů pro posuny do geometrických rovnic vycházejí pouze tři nenulové složky poměrných deformací.

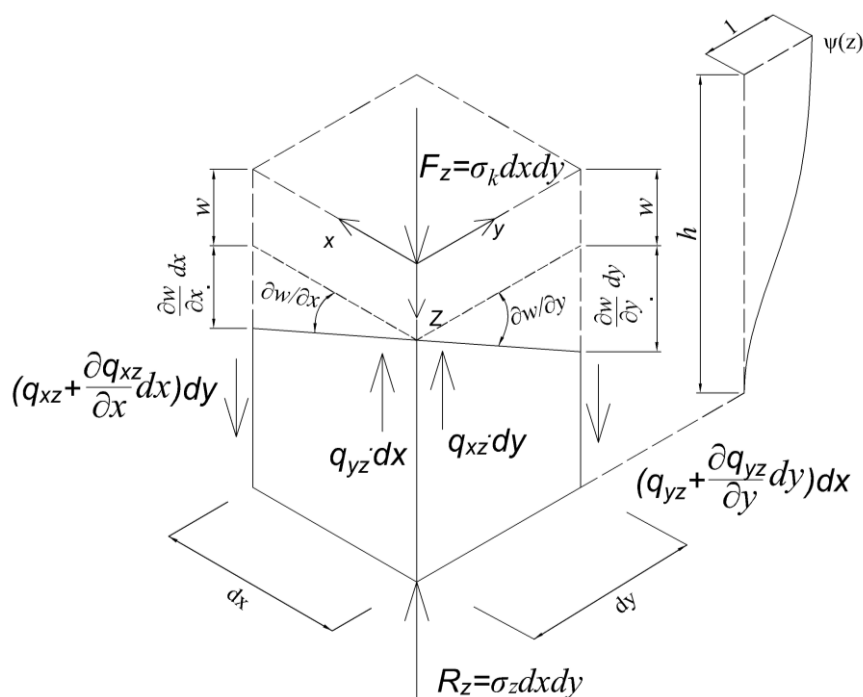
$$\varepsilon_z = w \frac{d\psi}{dz} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} \psi \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} \psi \quad (2.58)$$

Uvnitř podloží působí tedy jen 3 nenulové složky napětí.

$$\sigma_z = Ew \frac{d\psi}{dz} \quad \tau_{xz} = G \frac{\partial w}{\partial x} \psi \quad \tau_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y} \psi \quad (2.59)$$

Na povrchu elementárního sloupce podloží působí výslednice kontaktního napětí  $F_z$  a dvojice smykových sil  $q_{xz}$  a  $q_{yz}$ . Zespuďu působí na sloupec reakce  $R_z$ . Ze silové podmínky rovnováhy v ose  $z$  vychází vztah pro výslednici kontaktního napětí:

$$F_z = R_z - \frac{\partial q_{xz}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial q_{yz}}{\partial y} dx dy = \left( \sigma_z - \frac{\partial q_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial q_{yz}}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.60)$$



Obrázek 2.17. Elementární sloupec podloží s vyznačenými silami, které na něj působí a deformací povrchu.

Rovnice (2.60) obsahuje 3 neznámé, které je potřeba určit z fyzikálních a geometrických rovnic za použití energetických principů. Aby povrchové síly pracující na deformacích

povrchu vystihly deformační vlastnosti celé vrstvy, musí vykonat stejnou virtuální práci jako napětí uvnitř vrstvy podloží [3]. Virtuální práce napětí v podloží je rovna:

$$\begin{aligned}
 L_i &= \\
 &= \int_V (\delta \varepsilon_z \sigma_z + \delta \gamma_{xz} \tau_{xz} + \delta \gamma_{yz} \tau_{yz}) dV = \\
 &= \int_V \left( \delta w \frac{d\psi}{dz} E w \frac{d\psi}{dz} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \psi G \psi \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \psi G \psi \frac{\partial w}{\partial y} \right) dV
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Při zavedení označení

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \int_0^h \left( \left( \frac{d\psi}{dz} \right)^2 E \right) dz \\
 C_2 &= \int_0^h (\psi^2 G) dz
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

lze rovnici (2.61) přepsat do tvaru:

$$L_i = \int_S \left( \delta w C_1 w + \frac{\partial \delta w}{\partial x} C_2 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} C_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) dS = \tag{2.63}$$

Virtuální práce sil na vyjmutém elementu podloží (viz obr. 2.17), které na něj působí jako vnější síly je rovna:

$$\begin{aligned}
 dL_e &= \\
 &= \delta w \psi F_z + \delta w \psi R_z + \left( \delta w + \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx \right) \psi \left( q_{xz} + \frac{\partial q_{xz}}{\partial x} dx \right) dy + \\
 &+ \left( \delta w + \frac{\partial \delta w}{\partial y} dy \right) \psi \left( q_{yz} + \frac{\partial q_{yz}}{\partial y} dy \right) dx - \delta w \psi q_{xz} dy - \delta w \psi q_{xy} dx
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Po dosazení  $\psi(0) = 1$  a  $\psi(1) = 0$ , vyrušení některých členů a zanedbání členů s mocninami  $dx$  a  $dy$  vychází diferenciál virtuální práce vnějších sil:

$$\begin{aligned}
 dL_e &= \delta w R_z + \frac{\partial \delta w}{\partial x} q_{xz} dx dy + \frac{\partial \delta w}{\partial y} q_{xy} dx dy = \\
 &= \left( \delta w \sigma_z + \frac{\partial \delta w}{\partial x} q_{xz} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} q_{xy} \right) dx dy
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Integrací (2.65) po ploše se získá celková virtuální práce vnějších sil:

$$L_e = \int_S \left( \delta w \sigma_z + \frac{\partial \delta w}{\partial x} q_{xz} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} q_{xy} \right) dx dy \tag{2.66}$$

Porovnáním výrazů (2.66) a (2.63) se získají výsledné vztahy pro neznámé smykové síly a reakci podloží v hloubce aktivní zóny:

$$\begin{aligned}
L_e &= L_i => \\
\sigma_z &= wC_1 = w \int_0^h \left( \left( \frac{d\psi}{dz} \right)^2 E \right) dz \\
q_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} C_2 = \frac{\partial w}{\partial x} \int_0^h (\psi^2 G) dz \\
q_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} C_2 = \frac{\partial w}{\partial y} \int_0^h (\psi^2 G) dz
\end{aligned} \tag{2.67}$$

A konečně dosazením vztahů (2.67) do silové podmínky rovnováhy (2.60) se získá vztah pro kontaktní napětí:

$$\sigma_k = wC_1 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} C_2 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} C_2 \tag{2.68}$$

Ze vztahů (2.67) je patrné, že parametry modelu  $C_1, C_2$  nezávisí pouze na materiálových charakteristikách podloží, ale také na tvaru funkce útlumu  $\psi$  a hloubce aktivní zóny dosahu  $h$ . Problematika stanovení těchto parametrů je rozsáhlá a není předmětem této práce. Hodnoty parametrů pro některé typy horninového podloží jsou uvedeny v [3].

### 2.8.1 Matice tuhosti podloží

Za předpokladu, že deskový prvek spočívá celou svou plochou na podloží, lze tuhost podloží zahrnout přímo do matice tuhosti deskového prvku, protože průhybová plocha prvku je shodná s poklesem podloží. Pokud však má deska snahu se zvedat nad povrch, bylo by započítání tuhosti podloží chybné, protože na rozhraní desky a podloží by zjevně vznikalo tahové kontaktní napětí. Aby se projevil vliv podloží v okolí desky je navíc potřeba modelovat podloží i mimo desku. Tento problém se dá vyřešit numericky tak, že desce, která by představovala okolní podloží, se přiřadí velmi malá tloušťka a její tuhost by pak neovlivňovala deformaci podloží. Tímto způsobem jsou ale do výpočtu zavedeny zbytečné stupně volnosti v okolním podloží a s nimi spojené členy matice tuhosti jsou počítány rovněž zbytečně.

Alternativním přístupem je použití samostatných prvků pro podloží a pro desku. V okolním podloží jsou definovány pouze prvky podloží, zatímco v půdorysu desky definovány prvky deskové i prvky podloží, které mají shodné uzly. Při tomto přístupu však nastává problém v kombinaci prvků s různým počtem volnosti v jednom modelu, což způsobuje poměrně velké potíže při algoritmizaci úlohy. Na druhou stranu je při použití tohoto přístupu možné vystihnout nelinearitu kontaktu. V případě vzniku tahové síly v uzlu mezi podložím a deskou

se uzel zdvojí přidáním druhého stupně volnosti pro průhyb a deska se poté může deformovat nezávisle na podloží. Výpočet se pak opakuje v iteracích, dokud v žádném uzlu kontaktu nevzniká tahová síla.

Pro odvození matice tuhosti izoparametrického prvku podloží je potřeba vyjádřit vnitřní potenciální energii deformovaného podloží pomocí deformace povrchu:

$$\begin{aligned}
 \Pi_i &= \\
 &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV = \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \left( w \frac{d\psi}{dz} E w \frac{d\psi}{dz} + \frac{\partial w}{\partial x} \psi G \psi \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \psi G \psi \frac{\partial w}{\partial y} \right) dV = \\
 &= \frac{1}{2} \int_S \left( w C_1 w + \frac{\partial w}{\partial x} C_2 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} C_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) dA = \frac{1}{2} \int_S \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dS
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Vektor poměrných deformací:

$$\{\varepsilon\} = \left\{ w \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T \tag{2.70}$$

Matice tuhosti materiálu:

$$[D] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \tag{2.71}$$

Dále je odvození analogické k deskostěnovým prvkům. Pole posunů, které je aproximováno pomocí tvarových funkcí (2.17) nebo (2.20), obsahuje jedinou neznámou a to pokles (sednutí) povrchu podloží:

$$\{u\} = [N] \{r_e\} \tag{2.72}$$

Kde  $\{r_e\}$  je vektor uzlových posunů

$$\{r_e\} = \{w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_i \quad \cdots \quad w_n\}^T \tag{2.73}$$

a  $[N]$  je matice tvarových funkcí:

$$[N]_{1 \times n} = [N_1 \quad N_2 \quad \cdots \quad N_i \quad \cdots \quad N_n] \tag{2.74}$$

Vektor poměrných deformací se získá derivací pole posunů ze vztahu

$$\{\varepsilon\} = [\partial] \{u\} = [\partial] [N] \{r_e\} = [B] \{r_e\} \tag{2.75}$$

Derivační matice má tvar:

$$[\partial]_{3 \times 1} = \left[ 1 \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right]^T \tag{2.76}$$

Pro matici  $[B]$  platí:

$$[B]_{3 \times n} = [\partial][N] = [ [B_1] \quad [B_2] \quad \cdots \quad [B_i] \quad \cdots \quad [B_n] ] \quad (2.77)$$

Submatice  $[B_i]$  má tvar

$$[B_i]_{3 \times 1} = \left[ N_i \quad \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} \right]^T \quad (2.78)$$

Po převedení derivací do přerozených souřadnic má výsledná matice tvar:

$$[B_i]_{3 \times 1} = \frac{1}{|J|} \cdot \left[ N_i \cdot |J| \quad J_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad J_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - J_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right]^T \quad (2.79)$$

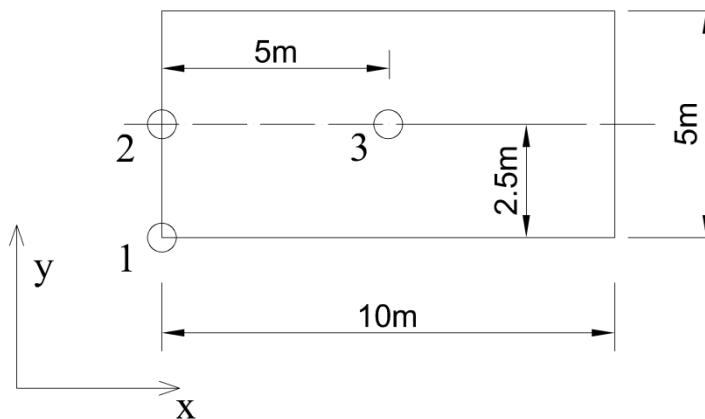
Jacobiho transformační matice (2.33) se nemění. Dosazením matice  $[B]$  do integrálního vztahu (2.28) pro výpočet matice tuhosti a použití numerické integrace se získá výsledný vztah pro matici tuhosti prvku podloží:

$$\begin{aligned} K_e^p &= \int_S [B]^T [D] [B] dx dy = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det(J) d\xi d\eta \cong \\ &\cong \sum_i \sum_j [B(\xi_i, \eta_j)]^T [D] [B(\xi_i, \eta_j)] \det(J(\xi_i, \eta_j)) w_i w_j \end{aligned} \quad (2.80)$$

Algoritmus výpočtu matice tuhosti podloží je uveden v příloze 4.

## 2.8.2 Příklad 4. Obdélníková deska na podloží

### Zadání úlohy



Obrázek 2.18. Geometrie desky, sledované body a sledovaný řez.



V úloze je řešena obdélníková deska o rozměrech  $10 \times 5$  m uložená na pružném podloží. Deska je zatížena rovnoměrným spojitým zatížením o intenzitě  $f_z = 10 \text{ MN/m}^2$ . Modul pružnosti  $E = 30 \text{ GPa}$ , Poissonův součinitel  $\nu = 0,2$ , tloušťka desky  $t = 0,5 \text{ m}$ . Parametry podloží:  $C_1 = 60 \text{ MN} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $C_2 = 30 \text{ MN} \cdot \text{m}^{-1}$ .

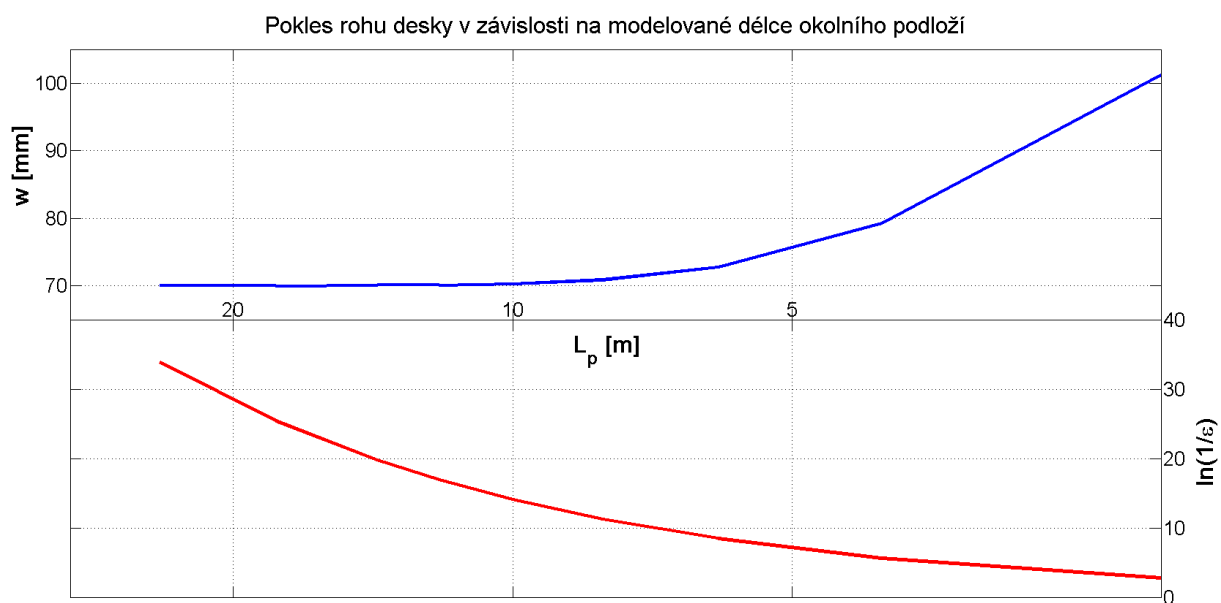
Tato úloha slouží k ověření správnosti výsledků vytvořeného programu pro řešení desek na podloží. Výsledky vybraných deformací a vnitřních sil ve vyznačených bodech jsou porovnány s výsledky z MKP softwaru SCIA Engineer.

### Vliv okolního podloží

Aby bylo vystiženo působení podloží i mimo základ, je potřeba tuto ovlivněnou část vymodelovat pomocí prvků podloží. Přitom velikost této oblasti musí být dostatečně velká. Z řešení diferenciální rovnice (2.68) s nulovou levou stranou je v literatuře [3] odvozen vztah pro tvar poklesové kotliny mimo základovou konstrukci. Poklesová kotlina se s rostoucí vzdáleností od základu exponenciálně zmenšuje a limitně se v nekonečno blíží nule. Pro praktické výpočty stačí modelovat oblast do vzdálenosti  $L_p$ , ve které je pokles v poměru k poklesu základu zanedbatelný. Pro tuto délku je v [3] odvozen vztah:

$$L_p = \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \quad (2.81)$$

Proměnná  $\varepsilon$  je poměr mezi poklesem v délce  $L_p$  a poklesem na okraji základové konstrukce, které se přiřazuje velmi malé číslo. Ze studie vlivu délky modelovaného okolního podloží na deformace v této úloze (viz graf na obrázku 2.19) vyplývá, že pro dostatečnou přesnost by se hodnota měla volit  $\varepsilon \leq 1 \cdot 10^{-4}$ .



Obrázek 2.19. Vliv délky modelovaného podloží mimo obrys desky na pokles rohového bodu

## Výsledky

Deska byla modelována  $25 \times 13$  prvky Q9. V tabulce 2.3 a 2.4 jsou uvedeny vybrané výsledky ve sledovaných bodech obdélníkové desky na podloží. Hodnoty získané výpočtem v MKP softwaru SCIA Engineer jsou označeny indexem *ref.* U průhybů bylo dosaženo velmi dobré shody v obou výpočtech.

číslo uzlu	$w[\text{mm}]$	$w_{ref}[\text{mm}]$	Relativní chyba
1	70,164	70,045	0,17%
2	98,354	98,267	0,09%
3	149,197	149,212	0,01%

Tabulka 2.3. Porovnání výsledných deformací ve sledovaných bodech.

Při porovnání vnitřních sil je vidět, že výsledky se ve vnitřním bodu desky shodují, zatímco v rohu, kde se vyskytují extrémní hodnoty (špičky napětí) jsou hodnoty vnitřních sil rozdílné. Nejpatrnější je to při srovnání smykové síly v rohovém uzlu, což může být způsobeno méně přesnou čtyřbodovou extrapolací smykových sil do uzlů prvku.

číslo uzlu	$m_x[\text{kNm/m}]$	$m_{x,ref}[\text{kNm/m}]$	$v_{xz}[\text{kN/m}]$	$v_{xz,ref}[\text{kN/m}]$
1	186,22	-201,77	6030,06	9438,47
2	66,21	-2,86	3624,15	3654,07
3	1669,67	1670,87	0	0

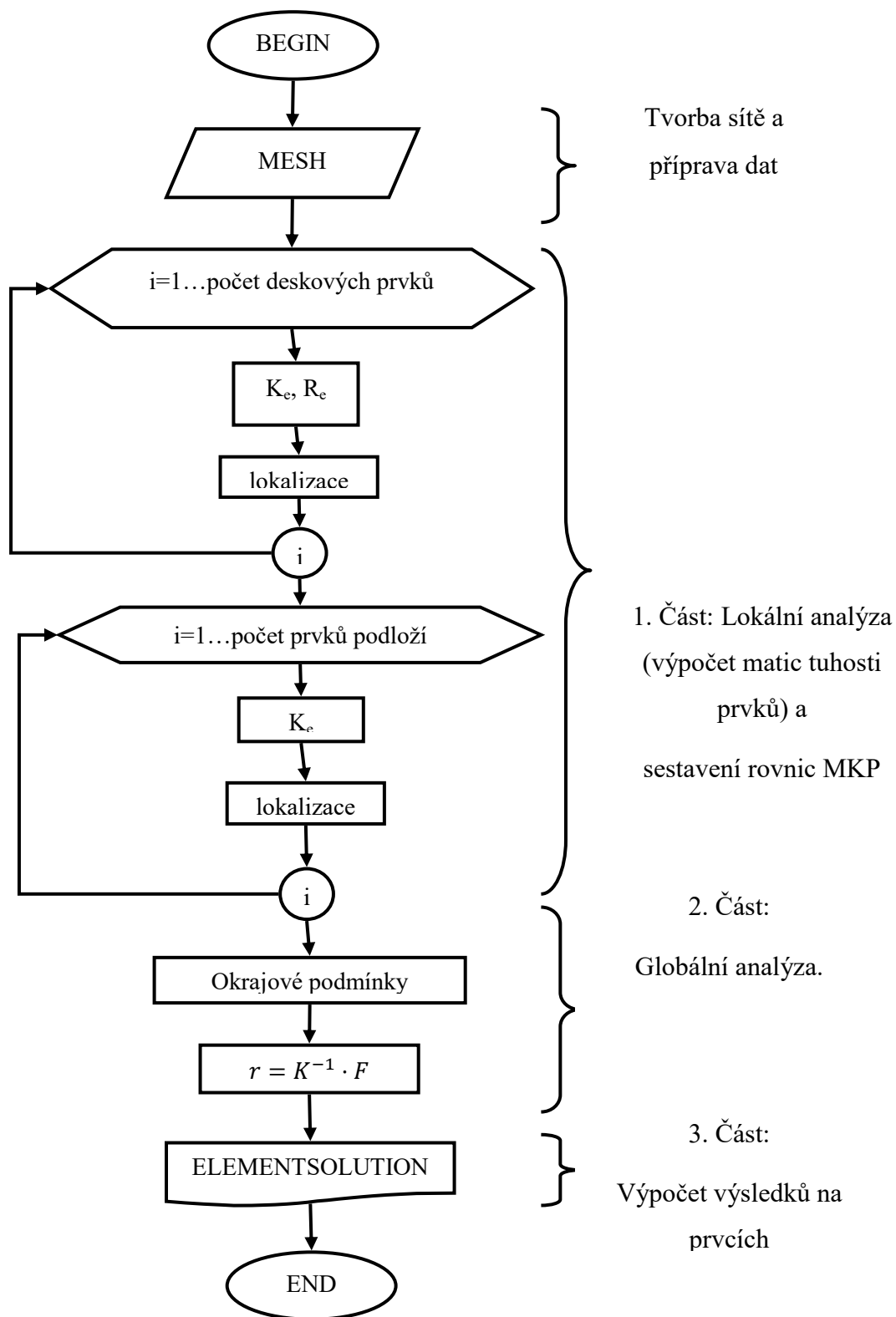
Tabulka 2.4. Porovnání vybraných vnitřních sil ve sledovaných bodech.

2D grafy a diagramy vnitřních sil ve sledovaném řezu jsou uvedeny v příloze 7. Celkově bylo u vytvořeného programu dosaženo velmi dobré shody a byla tak ověřena správnost algoritmů.

## 2.9 Popis algoritmu MKP

Výpočtový program byl sestaven v interaktivním programovém prostředí MATLAB, jehož skriptovací programovací jazyk je kompatibilní s volně šiřitelným softwarem GNU Octave. Na obr. 2.20 je zjednodušený vývojový diagram výpočetního algoritmu, který je rozdělen do tří částí. Nejprve probíhá příprava vstupních dat v samostatném procesu (tvorba sítě MKP). Vytvořený program umožňuje automatickou tvorbu pravidelné sítě pro řešení obdélníkových desek na podloží podle zadaných rozměrů a hustoty dělení. V první části základního algoritmu MKP probíhá výpočet matic tuhosti jednotlivých prvků a zároveň jejich lokalizace do globální matice tuhosti soustavy. Poté se zavedou okrajové podmínky a vypočítá se vektor neznámých deformací  $\{r\}$  z rovnice (2.15) ve druhé části. Výsledné globální deformace pak

vstupují do třetí části, ve které se počítají a vykreslují výsledné vnitřní síly po jednotlivých prvcích.



Obrázek 2.20. Zjednodušený vývojový diagram základního algoritmu MKP.

### 3 Paralelizace úlohy

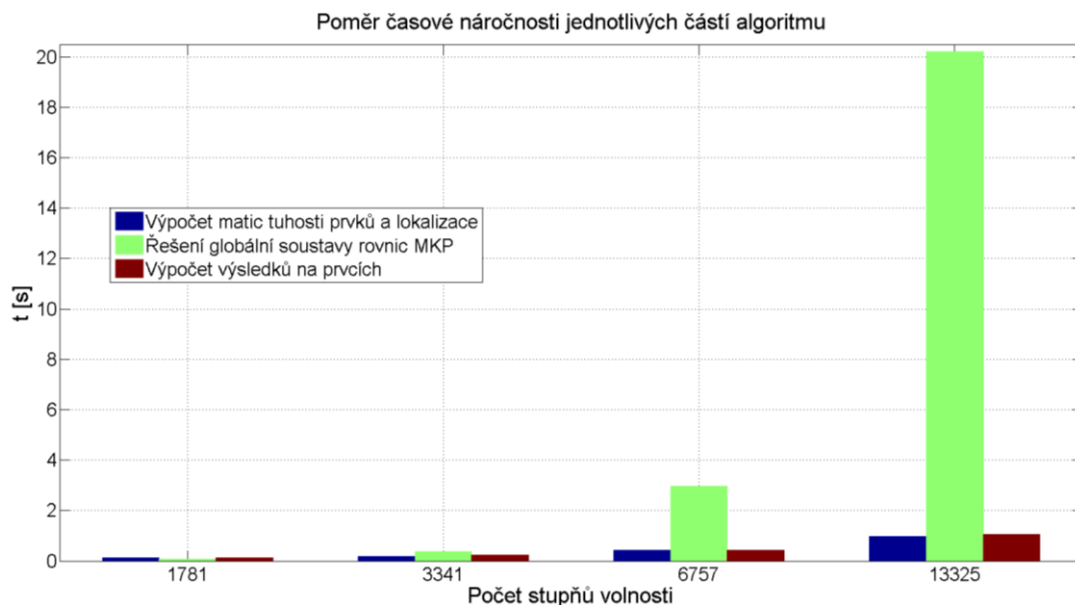
Paralelizace úlohy spočívá v její algoritmizaci takovým způsobem, aby bylo možné jednotlivé procesy provádět ve stejný okamžik. To vyžaduje, aby procesy byly navzájem nezávislé, a tedy nesmí záležet na tom, v jakém pořadí jsou jednotlivé procesy provedeny. Metoda konečných prvků je komplexní a využívá řadu numerických postupů, které lze paralelizovat.

Už z podstaty metody vyplývá, že lze paralelizovat lokální analýzu konstrukce na jednotlivých prvcích, která je úplně nezávislá. Lokální analýza v algoritmu MKP probíhá dvakrát. Nejprve se vypočítají matice tuhosti všech prvků a po určení neznámých uzlových posunů z globální analýzy probíhá podruhé, kdy se vyhodnocují vnitřní síly na prvcích. Viz obr.2.20.

Při řešení nelineárních úloh pomocí metody konečných prvků se využívá iteračního řešení, které zjevně paralelizovat nelze, protože každý následující krok iteračního výpočtu využívá výsledky z předchozího kroku. V závislosti na použité iterační metodě se v každém iteračním kroku opakovaně provádí celý základní algoritmus MKP nebo jeho část. Konvergence těchto úloh je citlivá jak na velikost zatěžovacího kroku, tak i na hustotu dělení na konečné prvky. Některé špatně podmíněné úlohy vyžadují řešení velkého počtu rovnic, která vyplývá z husté sítě MKP, v mnoha iteracích [1]. Jedinou možností urychlení výpočtu je paralelizace ve vnitřním cyklu iteračních metod, tedy v základním algoritmu MKP. Přitom výpočetní čas se s každou iterací kumuluje a tedy i malá úspora času v rámci základního algoritmu může být ve výsledku významná.

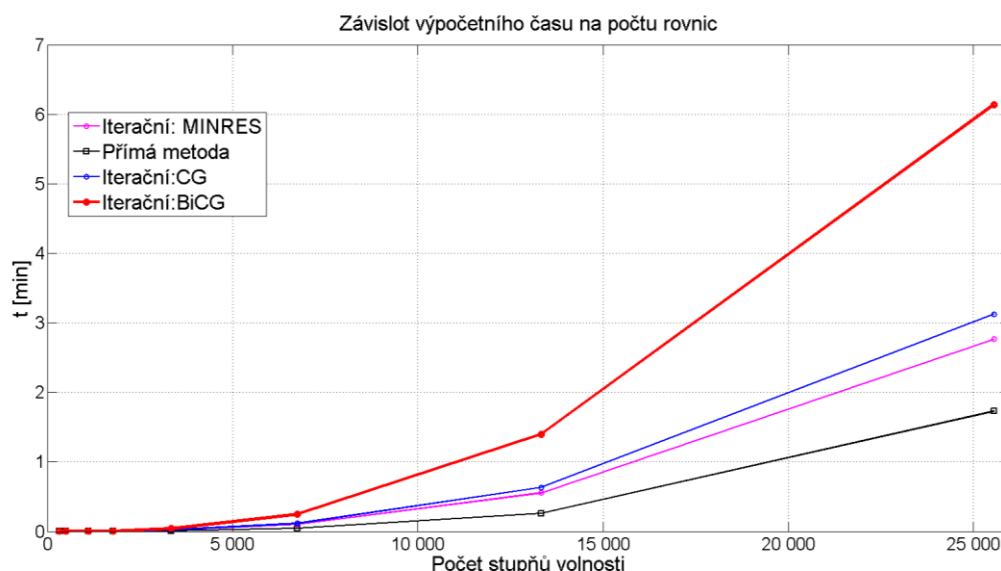
Další oblastí, kde se paralelizace využívá, jsou simulační pravděpodobnostní metody, které vyžadují provedení velkého počtu simulací pro dosažení vypovídajících výsledků. Simulace probíhá tak, že se náhodně vygenerují vstupní hodnoty, pro které se poté provede celý výpočet. Simulace jsou navzájem nezávislé a jejich paralelizace je tedy poměrně snadná.

Jako motivace k dalšímu postupu byla u základního algoritmu MKP pro řešení desek sledována časová náročnost jednotlivých částí na souboru různě velkých úloh. Výsledné výpočetní časy jsou zobrazeny ve sloupcovém grafu na obr. 3.1.



Obrázek 3.1. Závislost výpočetního času jednotlivých částí algoritmu na velikosti úlohy.

Z grafu je zřejmé, že paralelizace první a třetí části algoritmu MKP (lokální analýzy prvků) by přinesla znatelné urychlení výpočtu úloh menšího rozměru. Při zvětšování velikosti úlohy (počtu stupňů volnosti) však mnohem rychleji narůstá délka výpočetního času druhé části algoritmu, tedy řešení globální soustavy lineárních rovnic. Tato část algoritmu byla z výčtu možností v úvodu záměrně vynechána, protože její paralelizace není tak přímočará a jsou jí věnovány zbývající kapitoly práce. Jak je patrné z grafu na obr. 3.2 délka výpočetního času se s rostoucí velikostí úlohy exponenciálně prodlužuje.



Obrázek 3.2. Závislost času výpočtu soustavy lineárních rovnic různými řešiči na velikosti úlohy.

V grafu je porovnáno několik řešičů pro výpočet soustavy lineárních rovnic. Jejich popis a postup při implementaci je uveden např. v literatuře [5,6]. Jednou z možností jak urychlit výpočet soustavy lineárních rovnic je paralelizovat jednotlivé operace ve zvolené metodě. Nejčastější operací u iteračních metod řešení soustav lineárních rovnic je maticový součin. Pokud jsou násobené matice dostatečně velké, vyplatí se z hlediska výpočetního času rozdělení součinu mezi jednotlivé procesory. Pokud se součin rovnoměrně rozdělí mezi procesory, vznikají vyšší nároky na komunikaci mezi procesory, protože každému se přiřadí část matic, pro které má provést součin. Vyšší nároky na komunikaci mezi procesory, která je limitovaná velikostí a propustností pamětí, musí být vyváženy urychlením výpočetních operací. Hranice je dána hardwarovou konfigurací konkrétní výpočetní stanice. Matlab, který již obsahuje spoustu naprogramovaných funkcí pro řešení soustav lineárních rovnic i maticové operace a který využívá vysokoúrovňový programovací jazyk, už automaticky rozděluje spoustu operací mezi dostupné procesory, pokud je to výhodné. V tomto smyslu už je úloha částečně paralelizovaná.

Další urychlení výpočtu je tedy možné pouze zmenšením řešené soustavy lineárních rovnic. Metody pro rozdělení výsledné soustavy rovnic MKP na více menších soustav se souhrnně označují jako *metody doménové dekompozice* [6,7].

### **3.1 Metody dekompozice domény**

Metody dekompozice domény slouží k rozdělení řešené oblasti na podoblasti, které lze řešit samostatně. Podle typu proměnných na rozhraní mezi podoblastmi se tyto metody rozdělují na primární metody, které k definici vztahů mezi oblastmi používají pouze původní proměnné (uzlové posuny v MKP), a metody typu FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting), které v MKP definují vztahy mezi podoblastmi i pomocí silových veličin. Společným znakem primárních metod je shodující se síť prvků, zatímco metody typu FETI mohou mít na každé podoblasti různé sítě a uzly na hranicích nemusí být propojené. Metody typu FETI jsou tak vhodnější pro řešení geometricky nelineárních kontaktních úloh [6].

#### **3.1.1 Schwarzova metoda dekompozice s přesahem**

Schwarzova metoda pracuje pouze s původními proměnnými a patří tak mezi primární metody. Její podstata spočívá v rozdělení řešené oblasti na podoblasti, které se navzájem překrývají (viz obr. 3.3). Následně se soustava rovnic MKP (2.15) řeší iteračně. V první iteraci jsou zvoleny nulové hodnoty neznámých posunů a řeší se soustava rovnic pouze na

vnitřních uzlech každé podoblasti s předpokladem všech ostatních uzlů pevně uchycených a s předepsanými deformacemi z předchozího kroku. Předepsanými deformacemi je nutné opravit vektor zatížení na pravé straně rovnice. Při zavedení permutační matice  $[R_j]$ , které z celého vektoru neznámých  $\{r\}$  vybere pouze vnitřní neznámé  $\{r_j^i\}$ , patřící do podoblasti  $j$

$$\{r_j^i\} = [R_j]\{r\} \quad (3.1)$$

lze výslednou rovnici pro neznámé deformace uvnitř podoblasti v dalším iteračním kroku  $k + 1$  zapsat ve tvaru [6]:

$$[R_j][K][R_j]^T \{r_j^{i(k+1)}\} = [R_j]\{F_e\} - [R_j][K]\{r\} + [R_j][K][R_j]^T \{r_j^{i(k)}\} \quad (3.2)$$

Na konci kroku se vypočítá rozdíl od uzlových posunů z předchozího kroku.

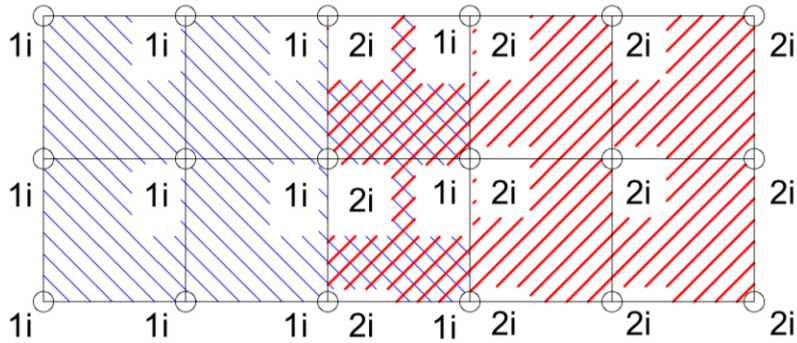
$$\{\Delta r_j^{i(k)}\} = \{r_j^{i(k+1)}\} - [R_j]\{r^{(k)}\} \quad (3.3)$$

Tyto přírůstky deformací se poté zpětně přičtou celkovému vektoru

$$r^{(k+1)} = \{r^{(k)}\} + \sum_{j=1}^N [R_j]^T \{\Delta r_j^{i(k)}\} \quad (3.4)$$

a výpočet se opakuje, dokud není vektor reziduálních sil  $\{F_r\}$  dostatečně malý.

$$\{F_r\} = \{F_e\} - [K]\{r^{(k)}\} \quad (3.5)$$



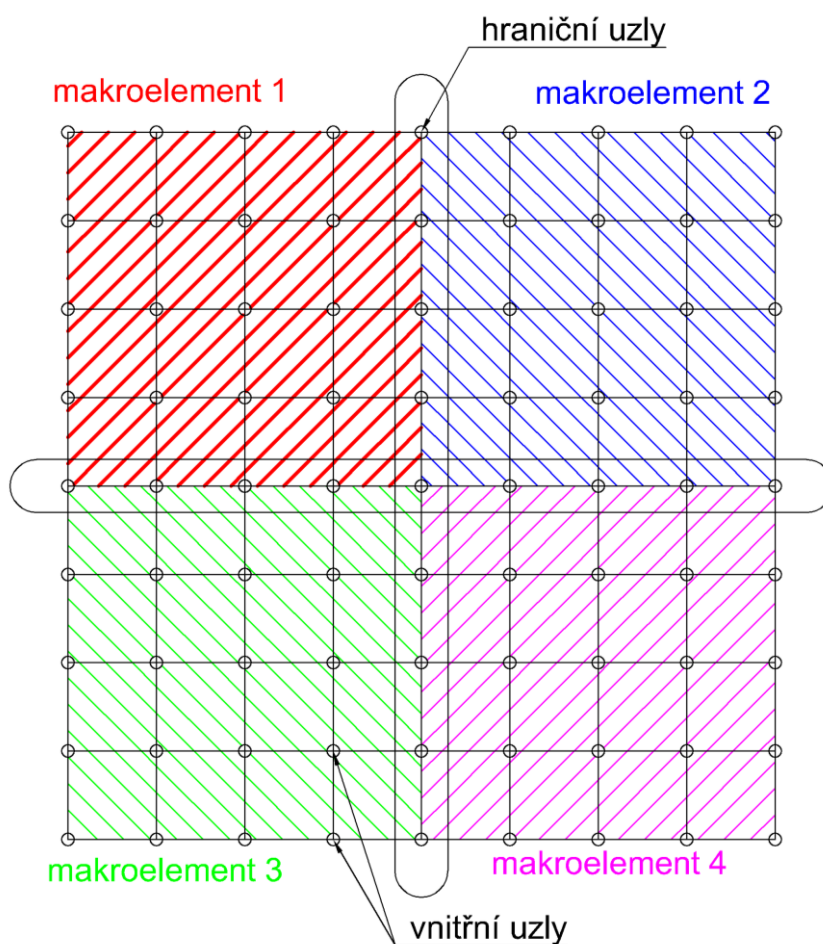
Obrázek 3.3. Příklad rozdělení sítě na dvě domény s přesahem.

### 3.1.2 Metoda Schurova doplňku

Druhou primární metodou doménové dekompozice je metoda *Schurova doplňku*. Tato metoda se v úlohách stavební mechaniky využívala ještě před rozvojem paralelních výpočtů na výpočetních clustrech v podobě statické kondenzace. Jinak se také označuje jako metoda subkonstrukcí. Rozdíl oproti předchozí metodě je ve způsobu rozdělení řešené oblasti.



Statická kondenzace využívá vlastnosti matice tuhosti, která vyplývá ze způsobu diskretizace pole deformací pomocí v metodě konečných prvků. Aproximační funkce jsou definovány pouze na oblasti konečného prvku, což má za následek vznik řídké matice tuhosti konstrukce. Uzlové posuny ovlivňují prostřednictvím členů matice tuhosti pouze nejbližší přilehlé uzly. Celá řešená oblast se rozděluje na domény, které se navzájem nepřekrývají. Tyto podoblasti se také označují jako subkonstrukce nebo superelementy [7]. Na obrázku 3.4 je příklad rozdělení čtvercové sítě na čtyři podoblasti, které jsou navzájem propojené v tzv. *hraničních uzlech*.



Obrázek 3.4. Rozdělení čtvercové sítě na domény bez přesahu.

Jelikož nejsou žádné dva uzly ležící uvnitř odlišné domény spojeny konečným prvkem a jeho aproximačními funkcemi, stupně volnosti příslušející k těmto uzlům jsou navzájem nezávislé. To umožňuje eliminaci všech vnitřních stupňů volnosti ze soustavy rovnic a řešit zvlášť tzv. *Redukovanou úlohu*, jejíž rozměr je dán počtem stupňů volnosti v hraničních uzlech. Při

použití vyšších prvků jako je prvek Q9 je potřeba aby hranice mezi doménami neprocházela vnitřními uzly ale správně po hraně prvku.

Vztahy pro formulaci úlohy jsou převzaty z [7, 6]. Pro matematickou formulaci statické kondenzace je potřeba speciálního číslování a tím i uspořádání matice tuhosti celé konstrukce. Číslování uzlů probíhá postupně po jednotlivých subkonstrukcích s tím, že se číslovají nejprve vnitřní uzly. Po přiřazení čísel ke všem vnitřním uzlům všech domén se očíslovují hraniční uzly. Při tomto postupu vznikne matice tuhosti celé konstrukce, kterou lze rozdělit do  $m + 1$  submaticových bloků:

$$\begin{bmatrix} [K_1^{ii}] & 0 & 0 & \dots & 0 & [K_1^{ib}] \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & [K_j^{ii}] & 0 & 0 & [K_j^{ib}] \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [K_m^{ii}] & [K_m^{ib}] \\ [K_1^{bi}] & \dots & [K_j^{bi}] & \dots & [K_m^{bi}] & [K^{bb}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1^i \\ \vdots \\ r_j^i \\ \vdots \\ r_m^i \\ r^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^i \\ \vdots \\ F_j^i \\ \vdots \\ F_m^i \\ F^b \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Dolní index  $j$  označuje číslo domény, horní index  $i$  označuje vnitřní stupeň volnosti, horní index  $b$  označuje hraniční stupeň volnosti a  $m$  je počet podoblastí.

Každá submatice  $[K_j^{ii}]$  je regulární a existuje její inverze za předpokladu, že celá konstrukce je dostatečně podepřena proti přemístění jako tuhého tělesa. Maticová rovnice  $[K_j^{ii}]\{r_j^i\} = \{F_j^i\}$  odpovídá řešení superelementu, který je pevně uchycen ve všech hraničních bodech. Z rovnice (2.87) lze vyjádřit všechny vnitřní neznámé ve tvaru:

$$\{r_j^i\} = [K_j^{ii}]^{-1}(\{F_j^i\} - [K_j^{ib}]\{r^b\}) \quad (3.7)$$

Po vyjádření všech vnitřních neznámých a dosazení do poslední maticové rovnice (3.6) se získá výsledný vztah pro redukovanou úlohu:

$$\left( [K^{bb}] - \sum_{j=1}^m [K_j^{bi}][K_j^{ii}]^{-1}[K_j^{ib}] \right) \{r^b\} = \{F^b\} - \sum_{j=1}^m [K_j^{bi}][K_j^{ii}]^{-1}\{F_j^i\} \quad (3.8)$$

Z této rovnice se vypočítají neznámá posunutí v hraničních uzlech sítě a následně dosazením do (3.7) se získají vnitřní neznámé posuny v jednotlivých podoblastech.

Oproti Schwarzově metodě není potřeba iteračního řešení a nevznáší do řešení žádné aproximace. Způsob jakým je řešená oblast rozdělena, aby byl výpočet co nejefektivnější, je dán konkrétní konfigurací výpočetní stanice nebo clusteru. Počet podoblastí většinou odpovídá počtu procesorů, na kterých se úloha paralelně řeší. Pokud se jedná o homogenní

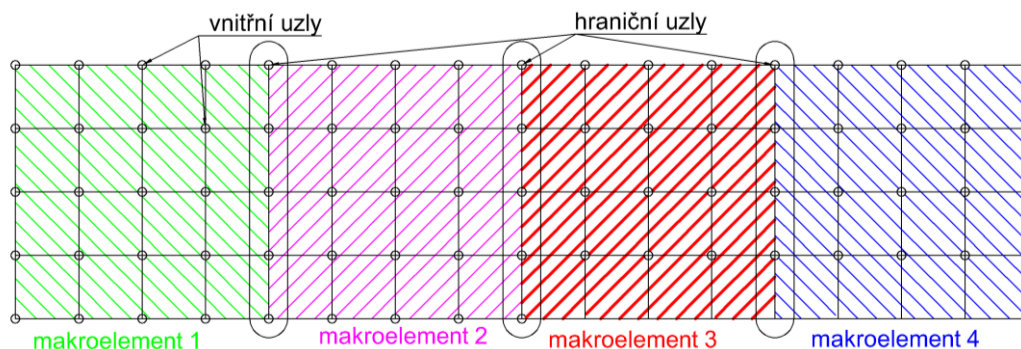
cluster, kde je výpočetní výkon jednotlivých procesorů srovnatelný, měly by být podoblasti přibližně stejně velké. Zároveň by měla vytvořená hranice obsahovat co nejméně uzlů, aby byla redukována úloha co nejmenší.

### **3.2 Algoritmizace metody Schurova doplňku pro řešení desek na podloží**

Zápis metody v předchozím odstavci je vhodný pro přehledný popis metody statické kondenzace, ovšem pro algoritmizaci nevhodný. Aby se matice tuhosti celé konstrukce dala rozložit na bloky podle (3.6), muselo by číslování dopředu respektovat rozdělení na hranice a podoblasti. Nebo by se alternativně musela celé matice přeuspořádat pomocí permutační matice, která by byla vytvořena na základě informací o rozdělení na podoblasti. Předností metody je skutečnost, že podoblasti jsou na sobě nezávislé a matice tuhosti konstrukce nemusí být v žádném kroku výpočtu sestavena kompletně. A tedy tvorba jednotlivých bloků matice tuhosti by měla být vytvářena nezávisle v každé podoblasti.

Do programu pro řešení desek byla metoda implementována způsobem, který umožňuje řešit libovolné sítě bez specifického číslování uzlů, pokud jsou vstupní data připravena v požadovaném formátu. Byly naprogramovány dvě procedury pro tvorbu sítí rozdělených na podoblasti. První procedura vyvábí vstupní data pro řešení obdélníkových desek na podloží dle zadaných rozměrů s volitelnou hustotou dělení na konečné prvky a s pevným rozdělením na čtyři podoblasti v osách desky (viz obr. 3.4). Druhá procedura opět vyvábí obdélníkovou síť podle zadaných rozměrů a hustoty dělení na prvky, ale umožňuje desku s podložím rozdělit na volitelný počet podoblastí v podobě vertikálních pásů, která je vhodnější pro desky podlouhlého tvaru. Obě procedury jsou uvedeny v příloze 5. Navíc se oproti základnímu algoritmu vytvářejí proměnné a pole s daty o způsobu rozdělení na podoblasti:

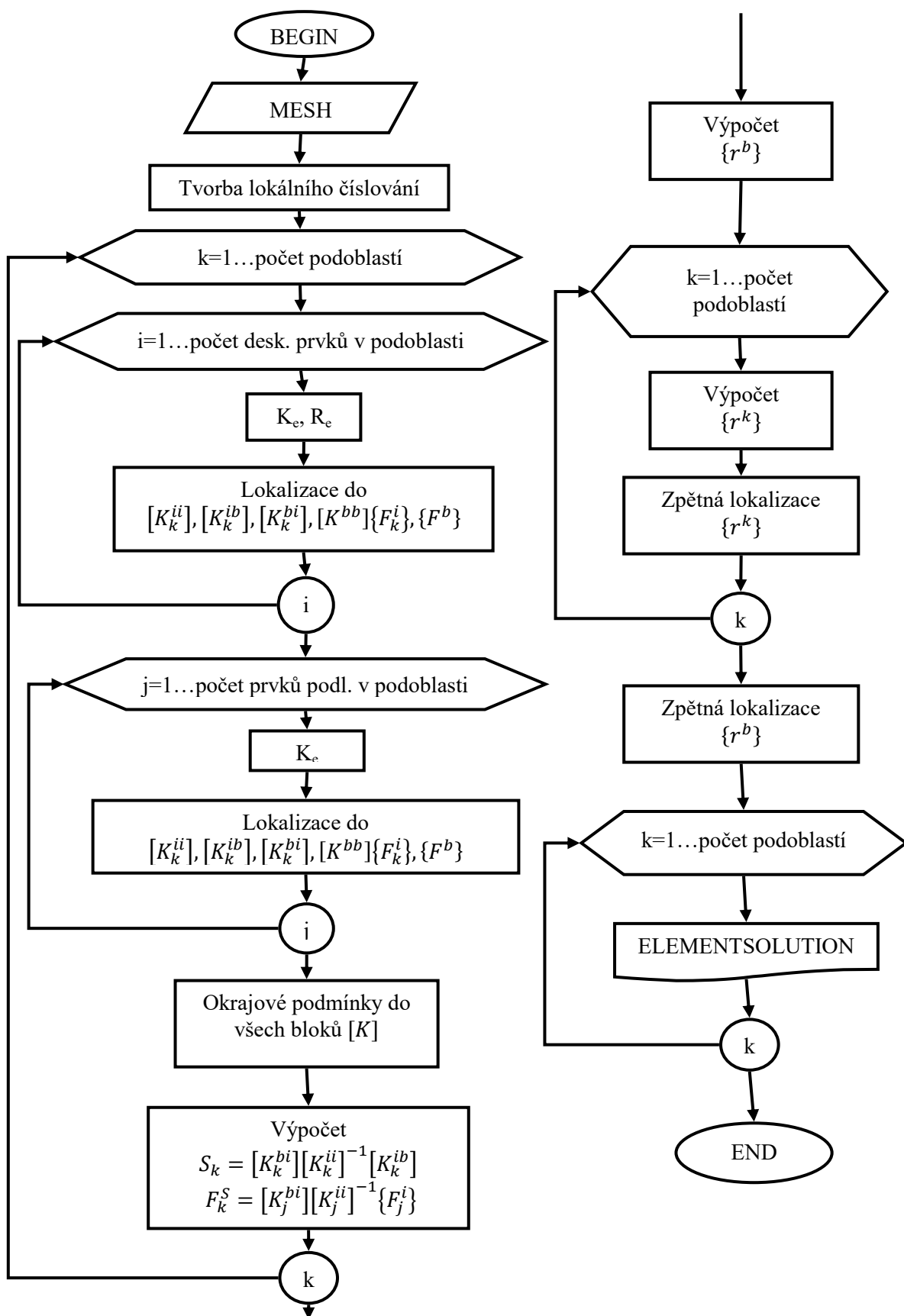
- Celkový počet hraničních stupňů volnosti.
- Celkový počet vnitřních stupňů volnosti.
- Počet podoblastí.
- Pole s výčtem deskových prvků v každé podoblasti.
- Pole s výčtem prvků podloží v každé podoblasti.
- Pole, ve kterém je uložen počet deskových prvků, počet prvků podloží, počet vnitřních a hraničních stupňů volnosti v každé podoblasti.



Obrázek 3.5. Příklad rozdělení sítě na vertikální pásy.

Na základě těchto vstupních dat se v algoritmu MKP vytvoří dvojí systém číslování uzlů a s tím i dvojí kódová čísla stupňů volnosti. První systém je globální a je shodný se základním algoritmem MKP. Globální kódová čísla jsou vytvořena na základě počtu stupňů volnosti a globálního čísla uzlu. Následně se na základě dat o rozdělení sítě na podoblasti vytvoří druhý soubor kódových čísel, který je lokální. V každé podoblasti začíná číslování od jedné až do počtu vnitřních stupňů volnosti. Hraniční oblast má také své lokální číslování od jedné až do celkového počtu hraničních stupňů volnosti. Zároveň jsou uloženy data potřebné ke zpětné lokalizaci neznámých deformací do globálního systému.

Výpočet členů matice tuhosti a jejich lokalizace do submaticových bloků v rovnicích (3.7) a (3.8) probíhá v cyklu pro všechny podoblasti. Na pořadí provedení operací v tomto cyklu nezáleží a proto je možné tuto část řešit paralelně včetně eliminace vnitřních proměnných výpočtem výrazů v sumách v rovnici (3.8). Po eliminaci vnitřních proměnných je vyřešena redukovaná úloha a získají se neznámé uzlové posuny v hraničních uzlech. Poté se vypočítají neznámé deformace vnitřních uzlů v každé podoblasti podle rovnice (3.7) a lokalizují se zpět do globálního systému číslování. Následný výpočet výsledků na prvcích probíhá obdobně jako v základním algoritmu, pouze je vnořen do cyklu přes všechny podoblasti. Zjednodušený diagram algoritmu je znázorněn na obrázku 3.6.



Obrázek 3.6. Zjednodušený vývojový diagram algoritmu MKP se statickou kondenzací.

### 3.2.1 Příklad 5. Čtvercová deska na podloží.

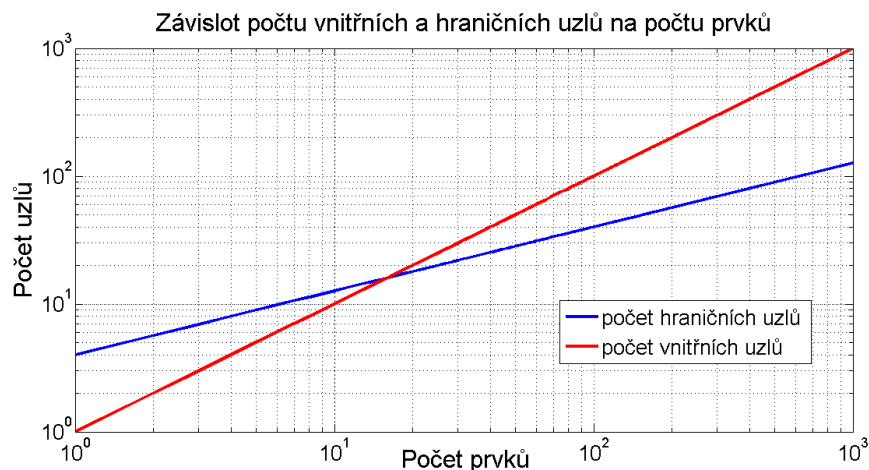
#### Zadání úlohy

V úloze je řešena čtvercová deska o rozměrech  $2 \times 2$  m uložená na pružném podloží. Deska je uprostřed zatížena soustředěným zatížením  $F_z = 300$  kN. Modul pružnosti  $E = 34$  GPa, Poissonův součinitel  $\nu = 0,2$ , tloušťka desky  $t = 0,15$  m. Parametry podloží:  $C_1 = 300 \text{ MN} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $C_2 = 10 \text{ MN} \cdot \text{m}^{-1}$ . Tato úloha je zjednodušeným modelem experimentální desky na obr. 3.7.



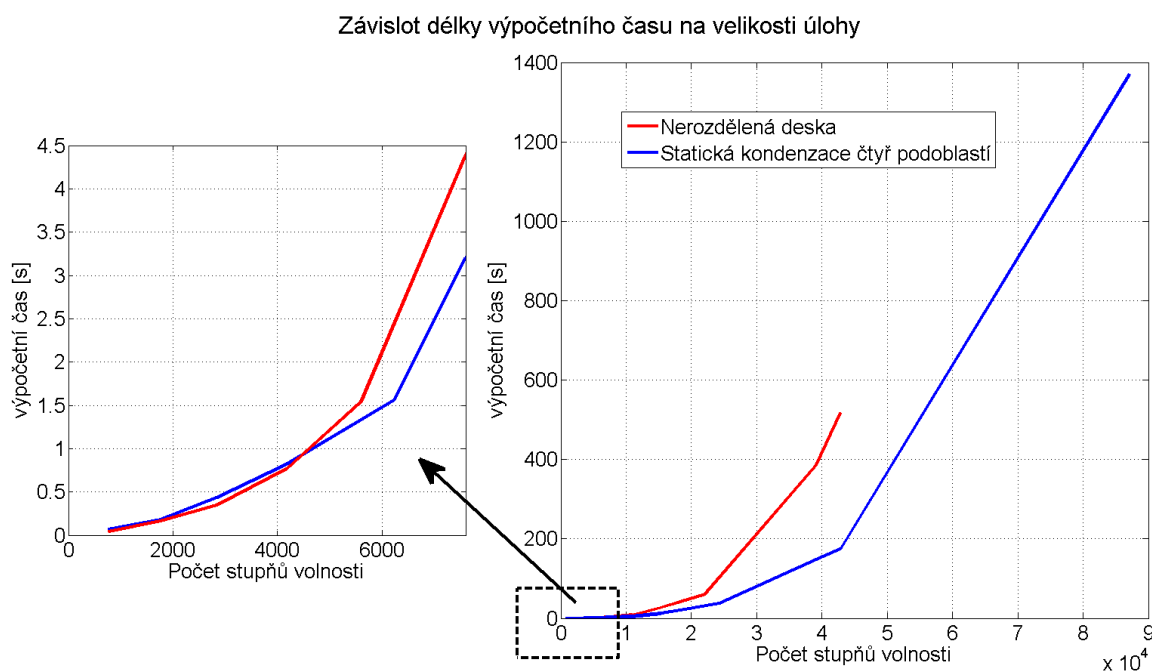
Obrázek 3.7. Fotografie experimentální desky.

Výpočet se prováděl pro různě husté sítě konečných prvků základním algoritmem (viz kapitola 2.9) a algoritmem využívající metody Schurových doplňků. Při výpočtu s využitím statické kondenzace byla síť vždy rozdělena na čtyři podoblasti a hranice procházela osami desky (viz obr. 3.4). Důsledkem toho narůstá počet vnitřních stupňů volnosti rychleji, než počet hraničních stupňů volnosti podle závislosti v grafu na obr. 3.8.



Obrázek 3.8. Počet vnitřních a hraničních uzlů pro čtvercovou síť dělenou na čtyři podoblasti.

Výsledné porovnání obou algoritmů je zobrazeno v grafu na obr. 3.9. U menších úloh dochází k nepatrnému zpomalení výpočtu využívajícího statickou kondenzaci, které je způsobeno vyšším počtem prováděných operací při přípravě vstupních dat a při eliminaci vnitřních proměnných. S rostoucím počtem stupňů volnosti dochází k výraznému zkrácení výpočetního času ve srovnání s výpočtem nerozdělené soustavy rovnic. Křivka odpovídající základnímu algoritmu je useknutá, protože výpočet narazil na limit paměti. Algoritmus s využitím statické kondenzace je zároveň rychlejší a úspornější v množství ukládaných dat, protože matice tuhosti konstrukce se nesestavuje celá.

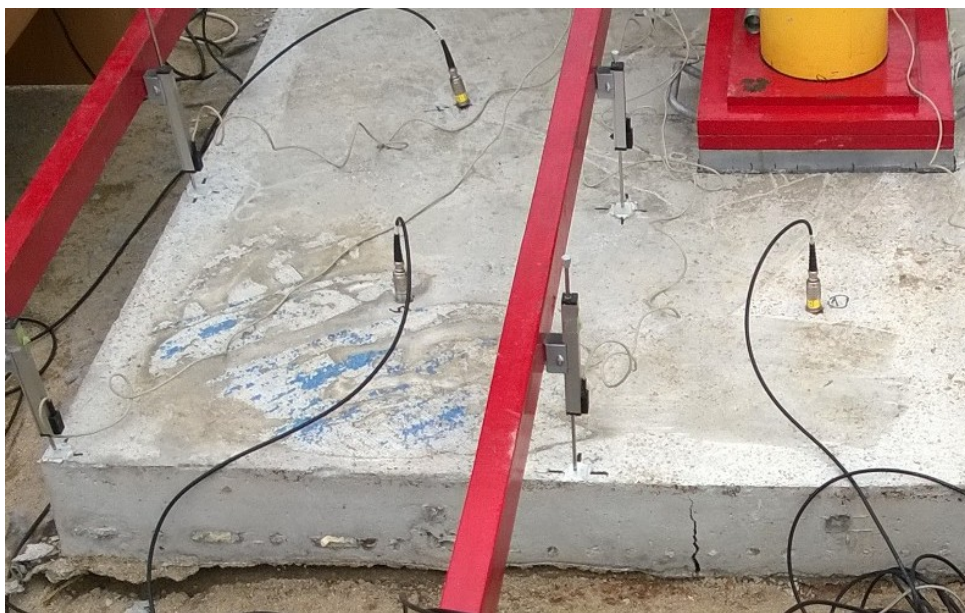


Obrázek 3.9 Porovnání efektivity základního algoritmu a algoritmu využívajícího statickou kondenzaci.



### 3.2.2 Nelineární kontaktní úloha s využitím statické kondenzace.

V nelineárních úlohách, které se řeší iteračně, se výpočet soustavy rovnic řeší v každém iteračním kroku a úspora času se tak násobí s každou iterací. U centricky zatížené desky spočívající na podloží s vysokou tuhostí mají rohy desky tendenci se zvedat nad povrch, což se projevuje i u experimentálních desek, jak je vidět na obr. 3.29. Tento jev vnáší do úlohy konstrukční nelinearitu, jelikož podloží nemůže přenášet tahové kontaktní napětí.



Obrázek 3.10. Roh experimentální desky, který se vlivem zatížení zvedá nad povrch podloží.

Pro řešení této nelineární úlohy byl algoritmus rozšířen o iterační výpočet. Algoritmus využívá skutečnosti, že podloží je modelováno pomocí samostatných prvků a jeho tuhost není přímo obsažena v matici tuhosti deskových prvků. V první iteraci probíhá výpočet podle diagramu na obr. 3.25. Po vypočítání neznámých deformací  $\{r\}$  se ze všech prvků podloží složí globální matice tuhosti celého podloží  $[K^p]$ . Následně se jejich součinem vypočítají reakce podloží na desku v každém jejím uzlu:

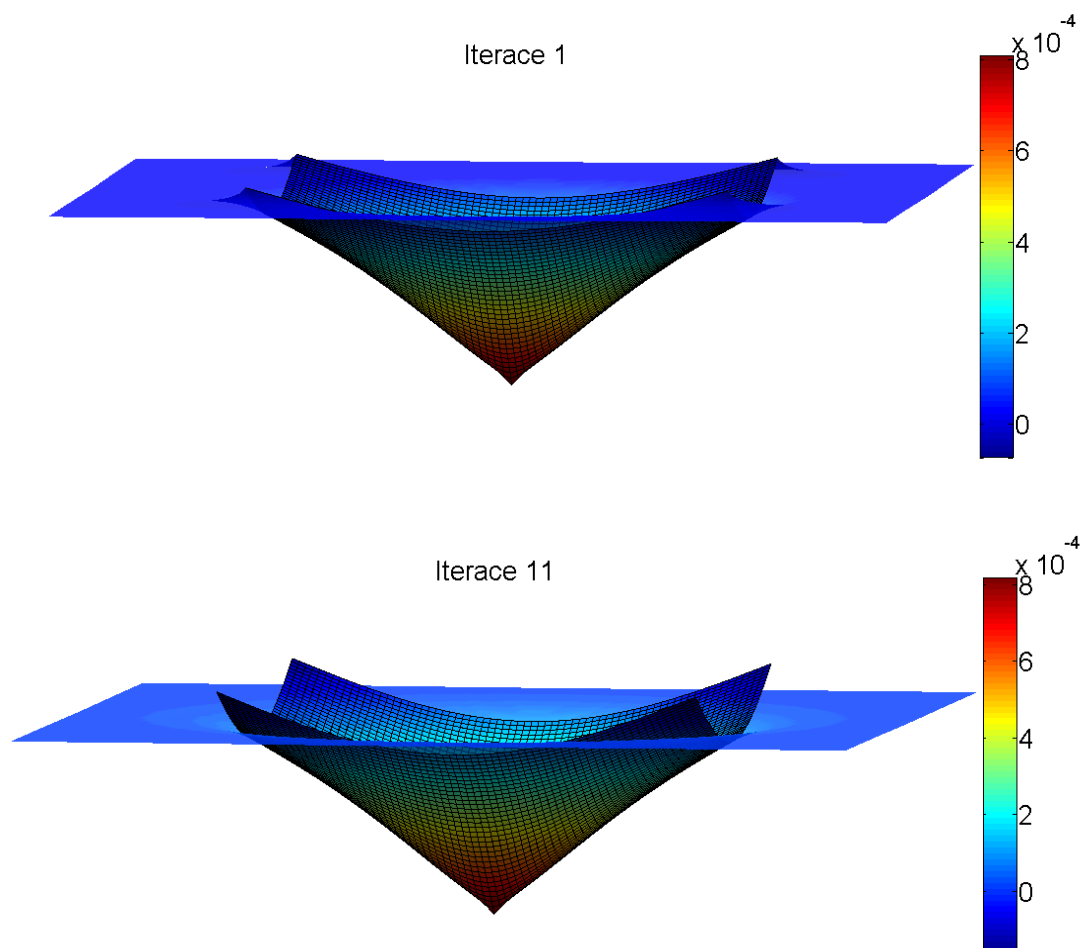
$$\{R_z^p\} = [K^p]\{r\} \quad (3.9)$$

Pokud je v některém uzlu desky reakce podloží tahová, přidá se do uzlu další stupeň volnosti pro průhyb desky. Podloží tak může volně sedat, nezávisle na průhybu desky. Celý výpočet se pak opakuje, dokud nejsou všechny reakce podloží na desku tlakové. Algoritmus nelineárního výpočtu s využitím statické kondenzace je uveden v příloze 6.

Příklad 5 byl tímto postupem řešen se sítí rozdělenou na pět pásů s celkovým počtem neznámých 35 293. Výpočet byl ukončen v jedenácté iteraci a celý trval cca 10 minut. Pokud



by síť nebyla rozdělená, trvala by jedna iterace podle závislosti v grafu na obr. 3.28 přibližně 5 minut a celý výpočet by tak zabral téměř hodinu. Na obrázku 3.30 jsou vykresleny průhyby desky v první a poslední iteraci. V první iteraci spolupůsobí deska s podloží v celé ploše a podloží se tak v rozích nadzvedává i s deskou. V poslední iteraci už podloží v rohových oblastech desky klesá nezávisle na desce.



Obrázek 3.11. Deformace desky a podloží v první a poslední iteraci.

## 4 Závěr

V první části práce jsou podrobně odvozeny vztahy pro výpočet deskostěnových konstrukcí pomocí izoparametrických konečných prvků. Byl kladen důraz na to, aby odvozené vztahy byly úplné a dávaly přímo návod na postup při algoritmizaci. Velký prostor byl věnován pro diskuzi výhod a nevýhod použití izoparametrických prvků při řešení desek podle Mindlinovy teorie. Byly odvozeny dva typy konečných prvků. Jednodušší čtyř-uzlový a složitější devíti-uzlový izoparametrický prvek. Na řadě příkladů bylo provedeno porovnání chování obou prvků v různých modelových situacích. Výsledky tohoto srovnání vycházely vždy ve prospěch vyššího devíti-uzlového prvku, který obecně rychleji konverguje se zhušťováním sítě konečných prvků, netrpí tolik nedostatkem tzv. smykového zamykání, a tudíž jej není potřeba numericky opravovat prostředky jako je selektivní nebo redukováná integrace, které za určitých podmínek mohou způsobovat nestabilní chování. Z těchto důvodů byl v praktické části použit devíti-uzlový prvek, jehož implementace do algoritmu je časově náročnější.

V druhé části práce jsou shrnuty způsoby modelování podloží a jsou odvozeny vztahy pro dvouparametrický Pasternakův model podloží, který je pak použit ve vytvořeném výpočetním programu. Tento model je na jednu stranu výstižnější než jednodušší jednoparametrický Winklerův model. Na druhou stranu vznikají při algoritmizaci této úlohy komplikace plynoucí z nutnosti modelovat i okolí základové konstrukce. Prvky podloží mají pouze jeden stupeň volnosti namísto tří u deskových prvků. Algoritmizace výpočtu, ve kterém se kombinují dva typy prvků a uzly s různým počtem stupňů volnosti, je objektivně mnohem složitější a časově náročnější než při implementaci jednoduššího jednoparametrického modelu. Přitom přínos je diskutabilní, protože ani jeden model nedokáže vystihnout skutečnou interakci základové konstrukce s podložím. Po této zkušenosti se jeví jako lepší postup použití jednoparametrického modelu ve spojení s interakční úlohou, který je popsán ve [2].

V praktické části práce byl vytvořen výpočetní program pro řešení desek na podloží v programovacím prostředí Matlab, jehož jazyk je kompatibilní s volně dostupným softwarem GNU Octave. Program automaticky generuje pravidelnou obdélníkovou síť podle uživatelem zadaných rozměrů a počtu konečných prvků. Jeho výstupem jsou deformace a vnitřní síly graficky zobrazené pomocí plošných grafů s barevnou stupnicí. Program lze použít i pro jiné tvary desek, ale vstupní data se musí připravit, nebo by se musely naprogramovat nové procedury pro automatické generování sítí jiných tvarů.

Ve třetí části práce jsou blíže představeny dvě metody doménové dekompozice, které umožňují rozklad celé soustavy lineárních rovnic a na více menších soustav a umožňují řešit tyto dílčí soustavy paralelně nezávisle na sobě. Z těchto dvou metod byla pro praktickou část zvolena metoda Schurových doplňků, která na rozdíl od Schwarzovy metody nevyžaduje iterační řešení a je vhodnější výpočty metodou konečných prvků. Výpočetní program byl poté rozšířen o možnost dělení sítě na volitelný počet subkonstrukcí a následně byla efektivita ukázána na numerických příkladech. I když k vlastní paralelizaci, z důvodu časové náročnosti algoritmizace, ve výpočetním programu nedošlo a jednotlivé subkonstrukce jsou řešeny v klasickém cyklu po sobě, došlo redukcí úlohy k výrazné úspoře výpočetního času. Tato časová úspora se nejvíce projeví řešení nelineárních úloh s velkým počtem stupňů volnosti, jak bylo ukázáno na řešení kontaktní úlohy v příkladu 5. Při implementaci metody statické kondenzace do obecnějšího MKP softwaru, by uživatel musel vytvářet makroelementy již v průběhu zadávání geometrie modelu a měl by tedy mít alespoň základní povědomí o principu této metody.

## 5 Seznam obrázků

Obrázek 2.1. Souřadnicová soustava, znaménková konvence posunů a natočení, schéma deformované desky.....	13
Obrázek 2.2. Měrné vnitřní síly a momenty na desce (červeně) doplněné o membránové vnitřní síly (modře) a odpovídající složky napětí.....	14
Obrázek 2.3. Transformace prvků Q4 a Q9 z přirozených do kartézských souřadnic. ....	19
Obrázek 2.4. Číslování a poloha uzlů prvku Q4, tvar interpolační funkce. ....	20
Obrázek 2.5 Číslování a poloha uzlů prvku Q9, tvar interpolačních funkcí.....	21
Obrázek 2.6 Schéma sítě a okrajových podmínek. ....	27
Obrázek 2.7. Průběh smykových sil $v_{xz}$ na desce. ....	29
Obrázek 2.8. Statické schéma. Řez deskou ve směru osy $x$ . ....	31
Obrázek 2.9. Srovnání rychlosti konvergence při zvětšování počtu prvků. ....	32
Obrázek 2.10. . Nepravý deformační mód desky modelované prvkem Q4 při použití selektivní integrace. ....	33
Obrázek 2.11. Statické schéma. Řez deskou ve směru osy $x$ . ....	35
Obrázek 2.12. MKP Sít' kruhové desky s vyznačeným řezem pro vykreslení výsledků.....	36
Obrázek 2.13. Průhyb desky v závislosti na vzdálenosti od středu. ....	38
Obrázek 2.14. Průhyb desky v závislosti na vzdálenosti od středu. ....	39
Obrázek 2.15. Měrný ohybový moment $m_r$ ve sledovaném řezu. ....	39
Obrázek 2.16. Měrný ohybový moment $v_{rz}$ ve sledovaném řezu. ....	40
Obrázek 2.17. Elementární sloupec podloží s vyznačenými silami, které na něj působí a deformací povrchu.....	42
Obrázek 2.18. Geometrie desky, sledované body a sledovaný řez. ....	46
Obrázek 2.19. Vliv délky modelovaného podloží mimo obrys desky na pokles rohového bodu.....	48
Obrázek 2.20. Zjednodušený vývojový diagram základního algoritmu MKP. ....	50
Obrázek 3.1. Závislost výpočetního času jednotlivých částí algoritmu na velikosti úlohy. ....	52
Obrázek 3.2. Závislost času výpočtu soustavy lineárních rovnic různými řešiči na velikosti úlohy.....	52
Obrázek 3.3. Příklad rozdělení sítě na dvě domény s přesahem. ....	54
Obrázek 3.4. Rozdělení čtvercové sítě na domény bez přesahu. ....	55
Obrázek 3.5. Příklad rozdělení sítě na vertikální pásy.....	58

Obrázek 3.6. Zjednodušený vývojový diagram algoritmu MKP se statickou kondenzací..	59
Obrázek 3.7. Fotografie experimentální desky.....	60
Obrázek 3.8. Počet vnitřních a hraničních uzlů pro čtvercovou síť dělenou na čtyři podoblasti.....	61
Obrázek 3.9 Porovnání efektivity základního algoritmu a algoritmu využívajícího statickou kondenzaci. ....	61
Obrázek 3.10. Roh experimentální desky, který se vlivem zatížení zvedá nad povrch podloží.....	62
Obrázek 3.11. Deformace desky a podloží v první a poslední iteraci. ....	63

## 6 Seznam tabulek

Tabulka 2.1. Umístění integračních bodů a hodnoty váhových koeficientů.....	26
Tabulka 2.2. Srovnání výsledků vybraných deformací pro konstantní a lineárně se měnící moment s použitím prvků Q4 a Q9. ....	28
Tabulka 2.3. Porovnání výsledných deformací ve sledovaných bodech. ....	49
Tabulka 2.4. Porovnání vybraných vnitřních ve sledovaných bodech. ....	49

## 7 Literatura

- [1] COOK, Robert Davis. *Concepts and applications of finite element analysis*. 4th ed. New York, NY: Wiley, c2001. ISBN 0471356050.
- [2] ČAJKA, Radim. *Interakce základových konstrukcí s podloží*. Ostrava: Katedra konstrukcí, FAST VŠB-TU, 2008. ISBN 978-80-248-1754-5.
- [3] BITTNAR, Zdenek a Jiří ŠEJNOHA. *Numerické metody mechaniky*. Praha: ČVUT, 1992. ISBN 80-01-00855-X.
- [4] KNUPP, Patrick M. a Stanly. STEINBERG. *The fundamentals of grid generation*. Boca Raton: CRC Press, c1993. ISBN 0849389879.
- [5] BARRETT, Richard. *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods*. Philadelphia: SIAM, 1994. ISBN 0898713285.
- [6] M. Okrouhlik: Numerical methods in computational mechanics, Czech Academy of Sciences, Prague, 2008
- [7] KRUIS, Jaroslav. *Domain decomposition methods for distributed computing*. Stirling, Scotland: Saxe-Coburg Publications, 2006. ISBN 9781874672234.

## 8 Přílohy

### Seznam příloh:

Příloha 1 – Matice tuhosti devíti-uzlového prvku.....	71
Příloha 2 – Matice tuhosti čtyř-uzlového prvku s využitím selektivní integrace.....	73
Příloha 3 – Výpočet vnitřních sil v uzlech devíti-uzlového prvku .....	75
Příloha 4 – Matice tuhosti prvku podloží.....	78
Příloha 5 – Procesy pro generaci sítě s rozdělením na subkonstrukce.....	80
Příloha 6 – Algoritmus MKP s využitím statické kondenzace a iteračním výpočtem kontaktu .....	86
Příloha 7 – Dodatek k příkladu 4. Grafické zobrazení deformací a vnitřních sil. ....	95